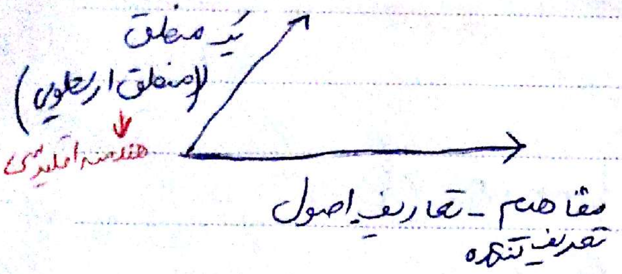
فصل سوم : منطق گزاره‌ای :



مثلاً: هندسه اقلیدسی.

هر نظریه، یک ساختمان منطقی.

. / : مفاهیم تعریف نشده

△ : مثلث، تعریف می‌شود.

مثلاً، اصل توازی اقلیدسی

زبان منطق گزاره‌ای عبارت است از:

گزاره‌ی ساده (اتمی) ، گزاره‌ی مرکب.

گزاره‌ی مرکب از گزاره‌ی ساده همراه با ادوات منطقی ساخته می‌شوند.

مثلاً عدد ۲ زوج است و $\sqrt{2}$ گنگ است.

گزاره‌ی ساده که نمی‌توان آن را شکست مثلاً عدد ۲ زوج است. $\sqrt{9}$ گویا است.

گزاره‌ی اتمی : P_0 و P_1 و P_2 ، ....

ادوات منطقی : ¬ ، ⊥ ، → ، $\underset{\uparrow}{\vee}$ ، $\underset{\uparrow}{\wedge}$ (فصل ، عطف) - تناقض : ⊥ نقیض : ¬

دروغ - غلط

نمادهای کمکی : (و)

∧ : ادات ۲- موضعی $P \wedge q$ ~~$P\wedge$~~

¬ : ادات ۱- موضعی ⊥ : ۰- موضعی مثل گزاره همیشه نادرست.

P : متغیر گزاره‌ای

Subject
Date

تعریف : رتبه یک گزاره

$$\begin{cases} r(A)=0 & \text{A اتمی و} \\ r(\neg A)=r(A)+1 & \\ r(A \circ B)=\max\{r(A), r(B)\}+1 & \circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\} \end{cases}$$

مثال : فرض کنید p، q، r اتمی اند.

$$r(p \wedge \neg(p \vee q))$$

$$= \max\{\underbrace{r(p)}_{0}, r(\neg(p\vee q))\}+1 = r(\neg(p\vee q))+1 = r(p\vee q)+۲$$

$$= \max\{r(p), r(q)\}+۳ = ۳$$

$r(p)=0.$ $$r(p\vee(\neg p \wedge q)) = \max\{r(p), r(\neg p\wedge q)\}+1$$

$$= r(\neg p \wedge q)+1 = \max\{\underbrace{r(\neg p)}_{1}, \underbrace{r(q)}_{0}\}+۲ = ۳$$

$$r(p\vee q) = \max\{r(p), r(q)\}+1 = 1$$

هرچه گزاره ی پیچیده تر باشد رتبه آن بیشتر است درواقع رتبه پیچیدگی یک گزاره را می رساند.

تعریف : مجموعه زیرگزاره های یک گزاره به صورت زیر است:

$\mathrm{sub}(A)=\{A\}$ اتمی A

$$\mathrm{sub}(\neg A)=\mathrm{sub}\,A \cup \{\neg A\}$$

$$\mathrm{sub}(A\circ B)=\mathrm{sub}\,A \cup \mathrm{sub}\,B \cup \{A\circ B\}$$

مثال: مجموعه زیر گزاره‌ی گزاره $p \wedge \neg(p \vee q)$ را بدست می‌آوریم.

$$sub(p \wedge \neg(p \vee q)) = sub(p) \cup sub(\neg(p \vee q))$$

$$\cup \{p \wedge \neg(p \vee q)\} = \{p\} \cup sub(p \vee q) \cup \{\neg(p \vee q)\}$$

$$\cup \{p \wedge \sim(p \vee q)\} = sub(p \vee q) \cup \{p, \neg(p \vee q), p \wedge \neg(p \vee q)\}$$

$$= \{p \vee q\} \cup sub(p) \cup sub(q) \cup$$

$$= \{p \vee q, p, q, \neg(p \vee q), p \wedge \neg(p \vee q)\}$$

مثال: مجموعه زیر گزاره‌ی $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ را بدست آورید.

* اگر مجموعه زیر گزاره‌ی یک مجموعه را خواستند، آن مجموعه‌ی را ساده نمی‌کنیم.

$$\{p, q, \neg p, p \vee q, \neg p \vee q, (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)\}$$

وجود پرانتز حتماً لازم است ولی می‌توان قراردادی تعریف کرد که تعداد پرانتزها را تا جایی که می‌توان کم کرد ← آن قانون این است که در پرانتز گذاری قوی ترین نقیض است - بعد ∧ و ∨ و بعد شرطی →

مثلاً $\neg p \wedge q$ → $(\neg p) \wedge q$ ✓

بدون پرانتز مبهم → $\neg(p \wedge q)$ ✗

$p \wedge q \rightarrow r$ → $(p \wedge q) \rightarrow r$ ✓ چون ∧ قوی‌تر است

→ $p \wedge (\cancel{q \rightarrow r})$

$$\neg\neg p \to q \rightsquigarrow (\neg(\neg p)) \to q.$$

$$\neg\neg p \wedge q \to r \rightsquigarrow (\neg(\neg(p \wedge q))) \to r$$?X

قرارداد: اگر یک نماد را تکرار کردیم پرانتزگذاری آن از سمت راست است.

$$p \to q \to r \rightsquigarrow p \to (q \to r)$$

$$p \wedge q \wedge r \rightsquigarrow p \wedge (q \wedge r)$$

پس به این طریق می‌توان پرانتزگذاری را تا جای ممکن کم کرد.
اما بعض [illegible] مواقع برای تأکید پرانتز را می‌ذاریم.

منطقی که ما می‌خوانیم منطق کلاسیک است منطق دو ارزشی است هر گزاره یا درست است یا نادرست یا صفر است یا یک

p	p
درست	0
نادرست	1

به صورت جبری:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{p راست} \\ 0 & \text{p دروغ} \end{cases}$$

v: تابع ارزش

v: مجموعه گزاره‌ها $\to \{0,1\}$

به هر گزاره می‌توان دو مقدار ۰ یا ۱ را نسبت داد.

در منطق دودویی ارزش هر گزاره از روی گزاره‌های اتمی و ادواتی که آن را ساختند مشخص می‌شود.

می‌توان نشان داد که:

$$v(p \wedge q) = v(p)\,v(q)$$

Subject
Date

p	$\neg p$
0	1
1	0

$v(\neg p) = 1 - v(p)$

(برای ۰ و ۱ اعداد باینری درست است)

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\rightsquigarrow v(p)=0 \quad v(q)=0$

$\rightarrow v(p)=0 \quad v(q)=1 \quad \ldots$

$$v(p\vee q) = v(p) + v(q) - v(p)v(q)$$

$$= \neg\, \neg p \wedge \underset{\vee}{\neg} q$$

تمرین: $v(p \to q) = ?$ از قبلا $\sim p \vee q$ استفاده کنیم

گزاره همان گو: یک گزاره همیشه درست. یعنی گزاره‌ایست که ستون آن در جدول ارزش تماماً یک باشد مثل $p \vee \sim p$ ، $p\wedge q \to p$.

به هر سطر یک تابع v ، یک تابع ارزش نسبت داده می‌شود (به آنها تعبیر هم می‌گویند)

گزاره‌ای همان‌گوست که تحت همه‌ی تعبیرها درست باشد.

به این بحث تعیین ارزش ← بحث معناشناسی گزاره‌ها می‌گوییم.

ارزش هر گزاره از روی گزاره‌های اتمی و ادوات آن مشخص می‌شود.

اگر خواستیم ارزش یک گزاره مرکب را بدست آوریم به گزاره‌های اتمی‌ای که در آن نیستند کاری نداریم.

گزاره‌های اتمی که داخل یک ~~هله~~ گزاره مرکب نیستند در تعیین ارزش آن گزاره‌ها به حساب نمی‌آیند بنابراین در تعیین ارزش یک گزاره مرکب تنها تعداد محدودی تعبیر داریم.

Subject
Date

اگر گزاره مرکب دارای n گزاره اتمی باشد آنگاه 2^n تعبیر برای تعیین ارزش آن کافیست.

p	q	$\sim p \wedge q$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$I_1 : \{p, q\} \longrightarrow \{0, 1\}$
$p \to 0$
$q \to 0$

$I_2 : \{p, q\} \to \{0, 1\}$
$p \to 0$
$q \to 1$

$I_4 : \{p, q\} \to \{0, 1\}$
$p \to 1$
$q \to 1$

$I_3 : \{p, q\} \to \{0, 1\}$
$p \to 1$
$q \to 0$

به هر سطر یک تابع نسبت میدهیم. I_1 سطر اول، I_2 سطر دوم و...
به هر کدام از این تابع‌ها یک تعبیر می‌گوییم.
دامنه این تابع، تمام گزاره‌های اتمی است اما اینجا ما فقط p و q را داریم پس دامنه $\{p,q\}$ است.

اگر I_2 را در نظر بگیریم $\sim p \wedge q$ تحت I_2 دارای چه ارزشی است؟
تحت تعبیر I_2 گزاره‌ی مرکب $\sim p \wedge q$ دارای ارزش راست و
تحت I_1 این گزاره دارای ارزش دروغ می‌باشد.

$I_2(\neg p \wedge q) = 1$ $\quad$ $I_1(\neg p \wedge q) = 0$

نماد دیگر:

$I_2 \models \neg p \wedge q$ $\quad$ $I_1 \not\models \neg p \wedge q$

مثلاً $I_3(\neg p \wedge \neg q)$ ؟

$I_3(\underbrace{\neg p}_{0} \wedge \neg \underbrace{q}_{1}) = 0 \xrightarrow{} I_3 \not\models \neg p \wedge \neg q$

Subject
Date

استفاده دیگر از این نماد:

$$\{ \alpha_1 , \dots , \alpha_t \} \models \beta$$

α_i ها و β همه گزاره‌اند.

یا

$$\alpha_1 , \dots , \alpha_t \models \beta$$

تعریف:

$$\forall \overset{\text{تعبیر}}{I} \quad I(\alpha_1) = \dots = I(\alpha_t) = 1 \longrightarrow I(\beta) = 1$$

* β نتیجه‌ی منطقی α_i هاست. یا β یک نتیجه معناشناسانه α_i هاست.

I_2 یک مدل برای $\neg p \wedge q$ است. (I_2 این گزاره را ۱ می‌کند)

I_1 یک مدل برای $\neg p \wedge q$ نیست.

اگر ارزش گزاره تحت آن تعبیر ۱ شد ← آن تعبیر یک مدل برای گزاره است.

〃 〃 ۰ 〃 نیست.

مثال:

$$\underbrace{p \to q}_{\alpha_1} \text{ و } \underbrace{p}_{\alpha_2} \models q$$

p	q	$p \to q$	q
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

* نتیجه‌ی منطقی:
اگر α_i ها درست بودند ← β را داریم.
نتیجه‌ی معناشناسانه:
(معنا دادن یعنی مقدار دادن)

[illegible] q باهم ۱ شدند پس

مثال: $\neg p \wedge q , p \to q \models q$

باید ۱ بشه

p	q	$\neg p \wedge q$	$p \to q$	
0	0	0	1	
0	1	1	1	درست ✓
1	0	0	0	
1	1	0	1	

$\forall I \quad I \models A$

اگر گزاره ی A تحت هر تعبیری 1 باشد.

گزاره A را همانگو گوییم هرگاه رابطه ی A بالا برقرار باشد.

در این صورت می نویسیم $\models A$

مثال : $\models p \to p$ و $\models p \vee \neg p$ ...

* $\models (p \wedge q) \to p$

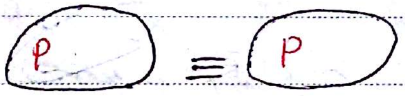
* به جای p یک گزاره دلخواه بگذاریم آیا باز هم همانگو هست؟

$\models ((p \to q) \wedge q) \to (p \to q)$

همانگو هست.

اگر در یک گزاره مرکب همانگو مانند A به جای یک اتم دلخواه آن مانند p گزاره ای مانند B قرار دهیم حاصل نیز همانگوست.

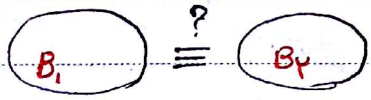
این یک روش برای تولید همانگوی جدید از روی همانگوی قبلی ست.



فرض کنید دو گزاره مرکب هم ارز داریم.

و $B_1 \equiv B_2$ به جای P در هر دو گزاره B_1 و B_2 قرار دهیم.

آیا حاصل ، هم ارزند؟



مسأله جانشینی یا جانشانی.

قضیه جانشینی : فرض کنید $A_1 \equiv A_2$ بعلاوه P اتمی در A_1 و در A_2 است.

و $B_1 \equiv B_2$ در این صورت

$$A_1[P/B_1] \equiv A_2[P/B_2]$$

در A_1 به جای $P \Leftarrow B_1$ و در A_2 به جای $P \leftarrow \overset{\text{جانشینی}}{B_2}$ گذاشتیم.

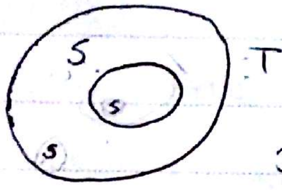
(چون در جدول ارزش B_1 و B_2 دارای ارزش های یکسان اند

پس وقتی جایگذاری کنیم نیز ارزش دو گزاره هم ارز است.)

Subject
Date

اگر در یک گزاره مرکب n گزاره اتمی داشته باشیم آنگاه برای تعیین همانگو بودن آن گزاره اتمی باید 2^n سطر را در جدول ارزش آن گزاره محاسبه کنیم این امر از نظر محاسباتی خوب نیست

مسأله: فرض کنید $S \subseteq T$ و $S \in T$ آیا $S \in S$ یا خیر؟ لزوماً نه



اگر الگوریتمی برای این سوال داشته باشیم تصمیم پذیر آن وقت می‌گوییم مسئله عضویت در S ~~تصمیم~~ پذیر است و اگر الگوریتمی نداشته باشیم گوییم تصمیم ناپذیر است
مجموعه گزاره‌های همانگو در منطق گزاره‌ای تصمیم پذیر است.
زیرا جدول ارزش داریم.

$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \perp$

ادات که در منطق گزاره‌ای داشتیم:

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

ترکیب‌ها:

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$
$$p \vee q \equiv p \vee q$$
$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$
$$\neg p \equiv \neg p$$
$$\perp \equiv \neg(p \vee \neg p)$$

این گزاره‌ها را برحسب $\vee$ و
$\neg$ و $\wedge$ بنویسیم.

$\{\vee, \neg\}$
$\{\wedge, \neg\}$
$\{\rightarrow, \neg\}$
$\{\rightarrow, \perp\}$

$$p \wedge q \not\equiv p \vee q$$

$$\underbrace{[\neg p \underset{\neg,\vee}{\wedge} (\neg q \vee r)] \underset{\vee,\neg}{\rightarrow} r}$$

می‌توان برحسب $\vee$ و $\neg$ نوشت

$p \wedge q \neq p \vee q$

دو گزاره زمانی هم ارزند که در جدول ارزش دارای ارزش یکیان باشد

Subject
Date

$$\neg\neg(\neg\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee r \overset{\text{ساده کردن}}{\equiv} p \vee \neg(\neg q \vee r) \vee r$$

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$p \mid q = \neg(p \wedge q)$ ادات شفر

ادات شفر را می توان برحسب جدول تعریف کرد.

$\vee$
$\wedge$
$\rightarrow$ $\rightarrow$ قابل تبدیل شدن به $\vee$ و $\neg$ اند.
$\neg$
$\perp$

اگر $\vee$ و $\neg$ را به ادات شفر تبدیل کنیم. آنگاه همه‌ی این ادات را می توانیم به ادات شفر تبدیل کنیم.

$\neg p \equiv p \mid p$

$p \mid p = \neg(p \wedge \overset{p}{p}) = \neg p$

$p \vee q = (p \mid p) \mid (q \mid q)$

$p \odot q$ ~~عدود~~ دلخواه
ادات

p	q	$p \odot q$
0	0	a
0	1	b
1	0	c
1	1	d

$p \odot q$
آیا هر ترکیب را می توان بر حسب ادوات شناخته شده ($\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \perp, 1$) بیان کرد؟

$a, b, c, d = 0$ یا 1

a دو حالت، b دو حالت و ... دارد. پس ۱۶ $= 2^4$ تا ادوات می توان بین p و q تعریف کرد. که ما ۵ تای آن ۶ را می شناسیم و ۱۱ تای دیگر غیر معروف اند.

جواب این است که هر p و q ای را که تعریف کنیم حتماً می توان آن را برحسب ادوات شناخته شده نوشت برای این کار یک الگوریتم داریم که در ادامه جلسه بحث گفته می شود.

تعریف : (دوشرطی)

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$$

اگر یک گزاره A را به صورت $A = (\wedge \dots \wedge) \vee (\wedge \dots \wedge) \vee \dots \vee (\wedge \dots \wedge)$ بنویسیم.

$$(A_{11} \wedge \dots \wedge A_{1n}) \vee (A_{21} \wedge \dots \wedge A_{2m}) \vee \dots \vee (A_{k1} \wedge \dots \wedge A_{kp})$$

A_{ij} ها یک اتم اند یا نقیض یک اتم.

آنگاه می‌گوییم که A را به صورت نرمال فصلی نوشته‌ایم.

برعکس این مورد صورت نرمال عطفی است.

$$A = (A'_{11} \vee \dots \vee A'_{1n}) \wedge (A'_{21} \vee \dots \vee A'_{2m}) \wedge (\quad) \wedge \dots \wedge (A'_{k1} \vee \dots \vee A'_{kp})$$

A'_{ij} : یک اتم یا نقیض یک اتم. (A_{ij} و A'_{ij} لزوما یکی نیستند)

مثال : صورت عطفی و فصلی گزاره زیر را بنویسید؟

$$A = (p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p)$$

= صورت نرمال عطفی =

$$A \equiv [(p \vee \neg q) \wedge r] \vee [(p \vee \neg q) \wedge \neg p]$$ از خاصیت پخشی استفاده می‌کنیم.

$$\equiv [(p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r)] \vee [(p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$$

$$\equiv (p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$ صورت نرمال فصلی A

این روش مقدماتی است.

Subject
Date

روش دیگر :

جدول :

p	q	r	A
0	0	0	1 → $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg q$
0	0	1	1 → $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
0	1	0	0 → $p \vee \neg q \vee r$
0	1	1	0 → $p \vee \neg q \vee \neg r$
1	0	0	0 → $\neg p \vee q \vee r$
1	0	1	1 → $p \wedge \neg q \wedge r$
1	1	0	0 → $\neg p \vee \neg q \vee r$
1	1	1	1 → $p \wedge q \wedge r$

اول جدول ارزش گزاره A را می‌کشیم .

جاهایی که A یک شده را مشخص می‌کنیم .

برای نوشتن صورت نرمال فصلی :

بین این روابط (که در سطر هستند) با ∨ می‌گذاریم .

$$A = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

برای نوشتن صورت نرمال عطفی : برعکس - جاهایی که A = 0 شده را در نظر می‌گیریم. آن‌ها را با هم عطف می‌دهیم.

$$A \equiv (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$p \to q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

صورت نرمال فصلی

$$p \to q \equiv (\neg p \vee q)$$ صورت نرمال عطفی

صورت نرمال عطفی و فصلی یکتا نیست . برای یک گزاره چند صورت نرمال عطفی و فصلی داریم .
اما با الگوریتم یک جواب بدست می‌آوریم .

$$p \to q \equiv (\neg p \vee q) \equiv (\neg p) \vee (q)$$

اگر به کمک الگوریتم صورت نرمال نوشتیم و یکی بلندتر بود آن یکی حتماً کوتاه‌تر است .

(مثلاً اگر صورت نرمال فصلی طولانی بود یعنی در جدول ارزش تعداد یک‌ها زیاد است
پس تعداد صفرها کم است و صورت نرمال عطفی کوتاه است)

Subject

Date

تمرین: یک گزاره مرکب دلخواه شامل سه گزاره اتم بنویسید وسپس صورت نرمال عطفی و فصلی آن را بدست آورید.

نظریه برهان:

دستگاه استنتاج طبیعی: ابداع توسط گنتسن.

دستگاه استنتاج طبیعی از قواعد استنتاج تشکیل شده.

دو دسته قاعده داریم: ۱ قواعد حذف ۲ قواعد معرفی

قاعده $$\frac{\vdots}{A}$$

مقدمات }

نتیجه }

حذف	معرفی
$\cfrac{\vdots \\ A\wedge B}{A}$	$\cfrac{\vdots \quad \vdots \\ A \quad B}{A\wedge B}$
به عنوان فرض $[A]^1 \quad [B]^2$ $\vdots \qquad \vdots$ حذف ۱ و ۲ $\cfrac{C \quad C \quad A\vee B}{C}$	$\cfrac{\vdots \\ A}{A\vee B}$
قیاس $\cfrac{\vdots \quad \vdots \\ A \quad A\to B}{B}$	$[A]^1$ $\vdots$ حذف ۱ $\cfrac{B}{A\to B}$ ۱
$\cfrac{\vdots \quad \vdots \\ A \quad \neg A}{\perp}$	$[A]^1$ $\vdots$ حذف ۱ $\cfrac{\perp}{\neg A}$

(۲ باعث تناقض شده پس نقیض ۲ را نتیجه می‌گیریم.)

مسأله: درخت استنتاج گزاره‌ی زیر را در دستگاه استنتاج طبیعی رسم کنید.

(وقتی میگه درخت استنتاج رسم کنید یعنی اون گزاره حتماً همانگو است)

$$A \to \neg\neg A$$

در استنتاج باید همه‌ی فرض‌ها را حذف کرد.

$$\cfrac{\cfrac{[A]^1 \qquad [\neg A]^2}{\perp}\ \text{حذف ۲}}{\cfrac{\neg\neg A}{A\to\neg\neg A}\ \text{حذف ۱}}$$

درخت استنتاج

به همین دلیل میگیم درخت استنتاج

$$(\underline{A}\to(\underline{B}\to C))\to(\underline{A\wedge B}\to C)$$

در گزاره‌ی شرطی مقدم را به عنوان فرض می‌گیریم

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A\wedge B]^1}{A} \qquad [A\to(B\to C)]^2}{B\to C} \qquad \cfrac{[A\wedge B]^1}{B}}{A\wedge B\to C}\ \text{حذف ۱}}{(A\to(B\to C))\to(A\wedge B\to C)}\ \text{حذف ۲}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$(A\wedge B\to C)\to(\underline{A}\to(\underline{B}\to C))$$

$$\text{حذف۳}\;\dfrac{\text{حذف۱}\;\dfrac{\text{حذف۲}\;\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1\quad[B]^2}{A\wedge B}\qquad[A\wedge B\to C]^3}{C}}{B\to C}}{A\to(B\to C)}}{(A\wedge B\to C)\to(A\to B\to C)}$$

$$X\longleftrightarrow Y$$

$$\dfrac{\boxed{\text{درخت استنتاج } X\to Y}\qquad\boxed{\text{درخت استنتاج } Y\to X}}{(X\to Y)\wedge(Y\to X)}$$

$$(A\to\neg A)\to\neg A$$

$$\text{حذف ۱}\;\dfrac{\text{حذف۲}\;\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to\neg A]^1\qquad[A]^2}{\neg A}\qquad[A]^2}{\perp}}{\neg A}}{(A\to\neg A)\to\neg A}$$

$$\dfrac{\dfrac{[A\to\neg A]^1\qquad[A]^2}{\neg A}}{(A\to\neg A)\to\neg A}$$

پس در گذاره ی شرطی عکس حکم را در نظر بگیریم یا مقدم را.

$$A\to(B\to A\wedge B)$$

$$\text{حذف۱}\;\dfrac{\text{حذف۲}\;\dfrac{\dfrac{[A]^1\qquad[B]^2}{A\wedge B}}{B\to A\wedge B}}{A\to(B\to A\wedge B)}$$

Subject
Date

$$((A\to B)\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$$

$[A]^{۱}$

$[B]^{۲}$

حذف ۱ $\quad A\to B \qquad [(A\to B)\to(A\to C)]^{۳}$

$A\to C \qquad [A]^{۴}$

C

حذف ۲ $\quad B\to C$

حذف ۴ $\quad A\to(B\to C)$

حذف ۳ $\quad [(A\to B)\to(A\to C)]\to(A\to(B\to C))$

تمرین: درخت استنتاج گزاره‌ی زیر را بدست آورید.

$$((A\to B)\to A)\to A$$

برای گزاره‌ی همانگو درخت استنتاج رسم می‌کنیم. اگر در بعضی موارد احساس کردیم گزاره اشتباه است جدول ارزش آن را رسم می‌کنیم.

مسأله: تعیین کنید گزاره‌ی زیر همانگو هستند یا خیر؟ با استفاده از جدول ارزش.

$$(\neg A\vee B)\leftrightarrow(B\to A)$$

$$A\to((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))$$

مسأله: ثابت کنید؟

$$\not\models (P_0\to P_1)\to P_0\wedge P_1$$

اگر همانگو نیست پس جدول ارزش را رسم می‌کنیم.

P_0	P_1	$P_0\to P_1$	$P_0\wedge P_1$	$(P_0\to P_1)\to P_0\wedge P_1$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

همانگو نیست

PAPCO

بدون استفاده از جدول ارزش هم می توان نشان داد همانگو نیست پس باید حداقل یکی از صفرهای آن را نشان دهیم.

$$\not\models \underbrace{\underbrace{(\underset{0}{P_0} \to \underset{0}{P_1})}_{1} \to \underbrace{P_0 \land P_1}_{0}}_{0}$$

پس همانگو نیست

جواب تمرین:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[(A\to B)\to A]^1 \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^3}{\bot}}{B}}{A\to B}\;\text{حذف ۳}}{A \qquad\qquad [\neg A]^2}}{\bot}}{A}\;\text{حذف ۲}}{((A\to B)\to A)\to A}\;\text{حذف ۱}$$

مثال: $\neg(A\to B) \to A$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg(A\to B)]^1 \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[A]^2 \quad [\neg A]^3}{\bot}}{B}}{A\to B}\;\text{حذف ۲}}{\bot}}{A}\;\text{حذف ۳}}{\neg(A\to B)\to A}\;\text{حذف ۱}$$

$$((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A$$

$$\text{حذف ۱}\ \dfrac{\text{حذف ۲}\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \to B) \land (A \to \neg B)]^1}{A \to B} \quad [A]^2}{B} \quad \dfrac{\dfrac{[(A \to B) \land (A \to \neg B)]^1}{A \to \neg B} \quad [A]^2}{\neg B}}{\bot}}{\neg A}}{[(A \to B) \land (A \to \neg B)] \to \neg A}$$

$$(A \to B) \to \neg (A \land \neg B)$$

$$\text{حذف ۲}\ \dfrac{\text{حذف ۱}\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land \neg B]^1}{A} \quad [A \to B]^2}{B} \quad \dfrac{[A \land \neg B]^1}{\neg B}}{\bot}}{\neg (A \land \neg B)}}{(A \to B) \to \neg (A \land \neg B)}$$

مسأله :

چهار نفر به نام های الف - ب - ج - د در یک مسابقه ی اسب سواری شرکت می کنند در خاتمه الف ادعا می کند من نه اول بوده ام و نه آخر ب ادعا می کند من آخر نبوده ام ج ادعا می کند من اول بوده ام د ادعا می کند من آخر بوده ام می دانیم سه تا از این ادعاها راست و یکی غلط است مشخص کنید چه کسی دروغ می گوید و چه کسی اول شده است ؟

$\neg(A\wedge\neg B)\to(A\to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [\neg B]^2}{A\wedge\neg B} \quad [\neg(A\wedge\neg B)]^3}{\bot}}{B}\text{حذف ۲}}{A\to B}\text{حذف ۱}}{\neg(A\wedge\neg B)\to(A\to B)}\text{حذف ۳}$$

$\neg A\vee B\to(A\to B)$

چون $\vee$ در فرض است و در حکم نیست باید $\vee$ حذف شود

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^4}{A\wedge\neg A}}{\bot} \quad \dfrac{\dfrac{[B]^3 \quad [\neg B]^5}{B\wedge\neg B}}{\bot} \quad [\neg A\vee B]^1}{\bot}\text{حذف ۳و۲}}{B}\text{حذف ۵}}{A\to B}\text{حذف ۴}}{\neg A\vee B\to(A\to B)}\text{حذف ۱}$$

قاعده حذف $\vee$

فرض ۱و۴ را داریم پس از ۵ به تناقض رسیدیم پس نقیض ۵ را داریم.

$A\vee\neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\vee\neg A} \quad [\neg(A\vee\neg A)]^2}{\bot}}{\neg A}\text{حذف ۱}}{A\vee\neg A} \quad [\neg(A\vee\neg A)]^2}{\bot}}{A\vee\neg A}\text{حذف ۲}$$

فصل سوم: منطق محمولات (منطق مرتبه اول)

یک مدل سازی: قانون قیاس $\frac{A \quad A \to B}{B}$

مثلاً:
همه انسان ها فانی هستند
سقراط انسان است
سقراط فانی است.

اگر بخواهیم استدلال بالا را با استفاده از منطق گزاره ها مدل سازی کنیم، بدست می آید
$\frac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{r}$ *
p و q دلخواه هستند.

$$\frac{\begin{matrix} 2 = 1+1 \\ 4 = 2 \times 2 \end{matrix}}{5 = 2+2}$$

نشان میدهد که مدل سازی درست نیست. *

این مثال نشان میدهد منطق گزاره ها برای مدل سازی همه ی استدلال هایی که در محاوره به کار میرود کامل نیست.

یک راهکار برای مدل سازی استدلال فوق این است که به سراغ شکافتن گزاره های اتمی برویم با این کار زبان ما که تا حال زبان منطق گزاره ها بود غنی تر خواهد شد.
برای این کار با یک مثال شروع می کنیم.

مثال: گزاره ی "هر عدد اول بزرگ تر از 2 فرد است." را در نظر بگیرید.

هر، همه، تمام: $\forall$ "سور عمومی" مثلاً $\forall x \ p(x)$

هست، وجود دارد، یافت می شود، برخی، بعضی: $\exists$ "سور وجودی" مثلاً $\exists x \ P(x)$

هیچ، ~~هیچ وقت~~ یافت نمی شود، وجود ندارد: $\nexists$ "سور صفر" مثلاً $\nexists x \ p(x)$

متغیر x از مجموعه ای می آید که آن را جهان اشیا می نامیم.

$\forall x \; P(x)$ خلاصه‌ای است از $\forall x \in M \; P(x)$ که M جهان اشیا است.

جهان اشیا یک مجموعه قراردادی در هر بحث است.

مثال: $\forall x \quad x^2 \geq 0$

مثلاً منظور $\forall x \in R \; x^2 \geq 0$ می‌باشد.

اگر جهان اشیا اعداد مختلط باشد ($\mathbb{C}$) آنگاه $\forall x \; x^2 \geq 0$
گزاره‌ای نادرست است. $i^2 = -1 \ngeq 0$

در کتاب‌های قدیم $P(x)$ را گزاره‌نما گویند. ← ($P(x)$ گزاره نیست چون درستی و نادرستی آن مشخص نیست ← x آن متغیر است اگر x را عدد بذاریم گزاره می‌شود)

سور وجودی و سور صفر نقیض هم اند.

$$\nexists x \; P(x) \equiv \neg(\exists x \; P(x)) \equiv \forall x \; \neg P(x)$$

$$\nexists \equiv \neg \exists$$

$$\neg(\forall x \; P(x)) \equiv \exists x \; \neg P(x)$$

عبارت «عدد اول» یک ویژگی برای اعداد است.

یک ویژگی یا خاصیت است ← اسم دیگر ویژگی ← محمول
فرد بودن ← یک محمول

چند مثال از محمول: مثلاً در هندسه ← قائم‌الزاویه بودن مثلث محمول است.

$P(x)$: x اول است
$q(x)$: x فرد است ← محمول

محمول تک موضعی یا تک متغیره ← $P(x)$ مثلا یک متغیر دارد

x و y اول هستند ← $P(x) \wedge P(y)$

x بزرگتر از y است : $P(x,y)$ ← یک محمول است گزاره نیست — یک محمول دو موضعی یا دو متغیره

۲ بزرگتر از ۳ است : $P(۲,۳)$

گزاره است

محمولات گزاره نیستند باید سور در کنار آن‌ها بیاید تا گزاره شوند.

آیا محمول n موضعی داریم؟ بله داریم ☺

$P(x_1, \dots, x_n)$ محمول nـ موضعی

محمول سه موضعی: $P(x,y,z)=$ x میانگین y و z است.

$$x=\frac{y+z}{۲}$$

$P(x,y,m)$: $x \overset{m}{\equiv} y$

مثلاً کاشان بین تهران و اصفهان است : $P(x,y,z)$

x y z

«دو» یک نام خاص است که به یک شی نسبت داده‌ایم (یک شی از جهان)

محمول‌ها همان رابطه‌ها در ریاضی اند.

یک محمول n موضعی مانند رابطه است که از n تایی‌های مرتب تشکیل شده است.

تمرین : یک گزاره مانند گزاره‌ی فوق نوشته و اجزای آن را بررسی نمایید.

ویژگی ها یا خاصیت های جهان محمول های تک موضعی اند.

«زوج بودن» یک ویژگی است که می توان آن را محمول تک موضعی گرفت:

$p(x)$: x زوج است

عدد ۲ یک شی در جهان است.

۲: یک نام خاص - یک ثابت - یک شی

x : یک نام (عمومی) $f(x)$: یک نام (عمومی) که f یک تابع است.

$\sqrt{x^2+y^2}$: یک نام   هر تابعی از متغیرها: یک نام

مادر موسی مریض است

موسی برادر هارون است

مادر هارون مریض است.

مثال: در استنتاج زیر «مادر بودن» یک تابع است:

$f($موسی$)$ = مادر موسی

$P(x,y) =$ x برادر y است (یا x و y برادرند)

تعریف: الفبای زبان منطق مرتبه اول (یا منطق محمولات) عبارت است از:

چند موضعی بودن

(الف) نمادهای محمولی یا رابطه ای مانند $P_1^{i_1}, P_2^{i_2}, P_3^{i_3}, \ldots$

اندیس دنباله

(مثلاً $P_2^{i_2}$ یک محمول i_2 موضعی است)

(ب) نمادهای تابعی مانند $f_1^{j_1}, f_2^{j_2}, f_3^{j_3}, \ldots$

اندیس دنباله

(مثلاً $f_1^{j_1}$ یک تابع j_1 متغیره است)

چند متغیره بودن

(ج) نمادهای ثابت $c_1, c_2, c_3, \ldots$ که این ها اشیا جهان ما هستند.

(د) متغیرها $x_1, x_2, x_3, \ldots$

(ه) ادوات و سورها $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp, \forall, \exists$

(و) نمادهای کمکی (,)

طبق قرارداد می‌توانیم محمولات را صفر موضعی هم بگیریم که در این صورت گزاره‌ی اتمی حاصل می‌شوند. این مطلب نشان می‌دهد که الفبای زبان منطق مرتبه اول شامل الفبای منطق گزاره‌هاست یعنی ما الفبای زبان قبلی را گسترش داده‌ایم.

در مورد بند (ب) در $f^{ن}$ ن حداقل یک است. اما طبق قرارداد می‌توان ن را از صفر شروع کرد. اگر ۰=ن باشد آنگاه تابع $f^{ن}$ یک ثابت است.

یک متغیره

۲ زوج است : $P(۲) = P^{0}(۲)$ $P(x) = P^{1}(x)$

صفر متغیره در واقع یک گزاره اتمی است.

$f^{1}(1, y) = \sqrt{1+y^{۲}}$ $f^{۲}(x, y) = \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$

$f^{0}(1, -1) = \sqrt{۲}$ یک نام خاص، یک ثابت

تابع $f^{۲}$ به تابع ثابت تبدیل می‌شود. توابع ثابت همان اسامی خاص هستند.

یک نام $f^{۲}(x, y)$ = یک ثابت یک نام خاص $f^{۲}(1, -1) = \sqrt{۲}$

تبدیل شده به $f^{0}(1, -1)$

بند (ج) طبق قرارداد بالا جزئی از بند (ب) می‌شود. اما ما برای تأکید بند (ج) را نوشته‌ایم.

نماد تساوی نیز به الفبا اضافه می‌گردد. نماد تساوی را می‌توان به هردو الفبای زبان منطق گزاره‌ها و نیز زبان منطق مرتبه اول اضافه نمود.

= یا ≈

در الف تعداد محمولات ۳ است.

تعداد توابع در بند (ب) ۱ تعداد ثابت‌ها در بند ج ۱ و تعداد متغیرها در بند (د) همه ۳ است ما همه‌ی این‌ها را ۳ گرفته‌ایم ولی می‌توان هرکدام از آن‌ها را هر عددی که می‌خواهیم بگیریم.

چه متناهی چه نامتناهی یعنی می‌توان الفباهای متفاوتی داشت این متفاوت بودن از تعداد محمولات، تابع‌ها، ثابت‌ها و متغیرها می‌آید و نیز از جنس خود محمولات، تابع‌ها، ثابت‌ها و متغیرها است.

	الفبای l_1	الفبای l_2
الف)	$\leq^{۲}$	$\mid^{۲}$ (عادکردن) و $\equiv^{۳}$ (هم‌نهشتی)
ب)	$+$ و $\times$ و $^{-1}$(وارون)	$+$ و $\times$
ج)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$
د)	$x_0, x_1, x_2, \ldots$	x, y, z
هـ)	همان ادوات و سورها	→ تغییر نمی‌کند
و)	همان نمادهای کمکی	

اگر در الفبای l_2 تفریق $-$ را یک تابع بگیریم باید تعریف کنیم که چگونه معنا دارد.
مثلاً ۳ ـ ۲ معنا ندارد.

ساختار متناظر با l_1: $(\mathbb{R}, \leq, +, \times, ^{-1}, \underbrace{0, 1})$

۱ و ۰ ثابت‌های مهم ← برخی اشیا جهان، برخی ثابت‌ها

l_2: $(\mathbb{N}, \mid, \equiv, +, \times, 1)$

ثابت ۱

۱ ← ثابت مهم

شکل کلی ساختار:

$$m = (\underset{\text{جهان}}{M}, \underbrace{P_1^{i_1}, \ldots}_{\text{تعدادی محمولات}}, \underbrace{f_1^{j_1}, \ldots}_{\text{تعدادی توابع}}, \underbrace{c_1, \ldots}_{\text{برخی ثابت‌ها}})$$

ساختار یک دنباله مرتب است.

اگر: $t_1 , \dots , t_n$ متغیر باشند $\xleftarrow{\text{تعریف}}$ یک ترم: $f^n(t_1,\dots,t_n)$

فرمول: یک فرمول یک عبارت معنی‌داریست که شامل نمادهای الفبای زبان منطق مرتبه اول می‌باشد یعنی عبارت معنی‌داریست شامل سورها، نمادهای کمکی متغیرها، ‖ و توابعی از متغیرها نماد تساوی و همچنین محمولات.

مثال: زبان $l = \{ \leq , \underset{\text{تابع تالی}}{s} , + , 0 \}$ روی اعداد حقیقی مفروض است. این زبان دارای ساختاره $m = (\underset{\swarrow \text{کلی تر است}}{M}, p^{۲}, f^1, g^{۲}, c)$ است.

فرمول $\exists x_{۲} \; \forall x_1 \;\; x_{۲} \leq s(x_1) + ۲$ در زبان l مفروض است که متناظر به $\exists x_{۲} \; \forall x_1 \; p^{۲}(x_{۲}, g^{۲}(f^1(x_1), \underset{\downarrow\, f^1(f^1(c))}{\cancel{c}}))$ در ساختار m است.

$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $s(s(0)) = ۲$

$x \to x+1$

تمرین: یک ساختار m و یک زبان l که تحت m است را بنویسید سپس یک فرمول در زبان l نوشته و عبارت متناظر آن را در ساختار m بدست آورید.

چند مثال از فرمول:

$F_{۱}: 0 \approx x_{۱}$

$F_{۲}: S(x_{٤}) \leq 0$

$F_{۳}: \exists x_{۲} \, (x_{۲} \leq S(x_{۲}))$

$F_{٤}: \forall x_{۵} \;\; \exists x_{۷} \;\; S(x_{۷}) \approx 0$

$F_{۵}: \forall x_{0} \;\; \exists x_{۱} \;\; x_{0} + S(x_{۱}) \approx x_{۳}$

این فرمول ۵ در یک ساختار اعداد طبیعی همراه با محمول $\geq$ و تابع تالی S تابع جمع معنا بکند

$F_{۶}: \forall x_{۱} \, (\neg x_{۱} \approx 0 \longrightarrow \exists x_{۳} \;\; x_{۱} + x_{۳} \approx 0)$

$F_{۷}: \forall x_{۱} \, (x_{۱} + x_{۲}) \approx 0 \;\; \wedge \exists x_{۲} \;\; x_{۲} \approx 0$

S تالی تک متغیره خوش تعریف ث

درست این است که به جای $\approx$ علامت = را قرار دهیم ما قبلاً قرارداد کردیم و $\approx$ را معرفی کردیم. پس فرقی نمی‌کند.

اگر در یک فرمول متغیری باشد که سور کنار آن قرار نگرفته باشد آن متغیر را آزاد گوییم. ولی اگر سور کنار آن قرار بگیرد آن گاه آن متغیر را پابند گوییم.

اگر یک فرمول را با F نشان دهیم:

$FV(F)$: مجموعه متغیرهای آزاد فرمول F

$BV(F)$: مجموعه متغیرهای پابند فرمول F

$FV(F_{۱}) = \{x_{۱}\}$
$BV(F_{۱}) = \emptyset$

$FV(F_{۳}) = \emptyset$
$BV(F_{۲}) = \{x_{۲}\}$

$FV(F_{۴}) = \emptyset$
$BV(F_{۴}) = \{x_{۵}, x_{۷}\}$

$FV(F_{۵}) = \{x_{۲}\}$
$BV(F_{۵}) = \{x_{۰}, x_{۱}\}$

$FV(F_{۶}) = \emptyset$
$BV(F_{۶}) = \{x_{۱}, x_{۳}\}$

$FV(F_{۷}) = \{x_{۲}\}$
$BV(F_{۷}) = \{x_{۱}, x_{۲}\}$

☆

۷ به صورت $P \wedge q$ ← فرمول‌هایی که به صورت $P \wedge q$ هستند متغیرهای آزاد p و q را جدا حساب می‌کنیم و اجتماع می‌گیریم.

فرمول‌هایی که زیرفرمول دارند مثلاً $P \wedge q$ و q و p جدا جدا حساب می‌کنیم و اجتماع می‌گیریم.

☆ پس می‌توان حتی مثالی زد که: $FV(F) \cap BV(F) \neq \emptyset$

$F_{۸}: \forall x_{۱} \neg x_{۱} \approx ۰ \rightarrow \forall x_{۱} \exists x_{۳} \; x_{۱} + x_{۳} \approx ۰$

$FV(F_{۸}) = \emptyset$
$BV(F_{۸}) = \{x_{۱}, x_{۳}\}$

$F_{۹}: \forall x_{۱} \neg x_{۱} \approx ۰ \rightarrow \exists x_{۳} \; x_{۱} + x_{۳} \approx ۰$

$FV(F_{۹}) = \{x_{۱}\}$

$BV(F_{۹}) = \{x_{۱}, x_{۳}\}$

اگر فرمول F به صورت $F = G \circ H$ باشد که $\circ$ یکی از ادوات باشد، آنگاه:

$$FV(F) = FV(G) \cup FV(H)$$

$$BV(F) = BV(G) \cup BV(H)$$

برای جلوگیری از پرانتزگذاری بیشتر و نیز خلاصه نویسی قواعد زیر را داریم:

۱- سورها از همه‌ی ادوات قوی تر هستند.

$(\exists x\ A) \wedge B$ یعنی : $\exists x\ A \wedge B$

۲- اگر یک سور پشت سرهم با چند متغیر تکرار شود فقط یک سور می‌نویسیم.

$\exists xy\ \forall Z\ A$ یعنی $\exists x \exists y\ \forall Z\ A$

(پشت سرهم و یکسان سور را حذف میکنیم)

سورهای متفاوت و پشت سرهم جابجا نمی‌شوند.

$\forall x\ \exists y\ x>y$ باهم فرق دارند $\exists y\ \forall x\ x>y$

اگر در یک فرمول چند سور پشت سرهم نوشته شده باشد پرانتز گذاری را از سمت چپ آغاز می‌کنیم.

$\exists x\ \forall x\ \exists Z\ A$ یعنی $\exists x(\forall x(\exists Z\ A))$

از متغیرهای آزاد و وابسته در استنتاج‌ها استفاده می‌کنیم.

زبان حساب به صورت $l = \{p^{۲}, s^{۱}, g^{۲}, f^{۲}, \bar{0}\}$ است.

محمول توابع نماد یک ثابت

ساختار $m = (\mathbb{N}, \leq, S, +, \cdot, 0)$ ذیل زبان فوق است و حساب اعداد طبیعی به انضمام صفر را بدست میدهد. که عدد صفر

تابع تالی $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$x \to x+1$$

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(x,y) \mapsto x+y$$

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(x,y) \mapsto xy$$

$$0, \underbrace{S(0)}_{\text{۱}}, \underbrace{S(S(0))}_{\text{۲}}, \underbrace{S(S(S(0)))}_{\text{۳}}, \ldots$$

زبان l :

ساختار m :

$$\begin{tikzcd} p^{۲} \arrow[d, "I"] & s^{۱} \arrow[d, "I"] & g^{۲} \arrow[d, "I"] & f^{۲} \arrow[d, "I"] & \bar{0} \arrow[d, "I"] \\ \leq & S & + & \cdot & 0 \end{tikzcd}$$

تابع تعبیر I :

زبان l :

ساختار m :

$$\begin{tikzcd} p^{۲} \arrow[d] & s^{۱} \arrow[d] & g^{۲} \arrow[d] & f^{۲} \arrow[d] & \bar{0} \arrow[d] \\ \leq & S & \cdot & + & 0 \end{tikzcd}$$

یک تعبیر دیگر J

* هر نماد در زبان تبدیل به یک شی در ساختار می شود.

(در هر دستگاه گزاره ای هست که نمی توان آن را اثبات کرد نه می توان آن را رد کرد یکی از آن ها سازگاری سیستم است.)

فرمول‌های زیر را در زبان l در نظر بگیرید.

$$A_1 = P^2(\bar{0}, S^1(x)) \xmapsto{I} A_1^* = 0 \leq S(x)$$

$$A_2 = \exists x\ P^2(y, x) \xmapsto{I} A_2^* = \exists x\ \ y \leq x$$

$$A_3 = \forall x\ (f^2(x, S^1(\bar{0})) \approx x) \xmapsto{I} A_3^* = \forall x (x \circ S(0) = x)$$

فرمول A_1 در زبان l به دستور A_1^* در ساختار m ترجمه شد.

*: $0 \leq x+1$ که هم بعضی‌ها می‌نویسند که $x+1$ هم $S(x)$ است هم $+(x,1)$ که اگر به شکل $+(x,1)$ بنویسیم $S(x)$ را هم می‌کنیم سپس ساده می‌کنیم و به شکل $S(x)$ می‌نویسیم

در A_1^*، x متغیر آزاد است.

در A_2^* x پایبند و y آزاد است. سوال: آیا در فرمولی مانند اینجا می‌توان به جای یک متغیر آزاد هر متغیری که بخواهیم قرار دهیم؟

جواب منفی است چرا که اگر یکی از همان متغیرهای پایبند را به جای متغیر آزاد قرار دهیم جواب تغییر می‌کند

سورها تعمیم «و» و «یا» هستند.

$$\forall x\ \ P(x) \equiv P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

$$\exists x\ \ P(x) \equiv P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n)$$

هرگاه جهان اشیا متناهی باشد یعنی $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ آنگاه روابط بالا را داریم.

بنابراین سورهای عمومی و وجودی تعمیم $\wedge$ و $\vee$ هستند.

اگر بخواهیم هم‌ارزی این‌ها را چک کنیم باید چک کنیم ارزش‌های برابر دارند

~~بین~~ روی نامتناهی شی می‌توان سور وجودی یا عمومی داشت ولی عطف و فصل تنها روی دو شی اثر می‌کنند.

جهان نامتناهی

$\wedge\ \vee\ \underset{\exists}{\forall}$ $\overset{\forall}{\exists}$

جهان متناهی

مثال: $N=\{x_1, x_2, \ldots\}$ (نامتناهی)

می‌توان گفت: $\forall x \in N\ P(x)$ و $\exists x \in N\ P(x)$.

~~$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \ldots$~~

نمی‌توان ∧ را بین نامتناهی گزاره گذاشت.

نماد: فرمول A و متغیرهای t و x را در نظر بگیرید

در فرمول A به جای x نام t را قرار دهیم: $A[x|t]$

جانشینی نام t به جای متغیر x.

مثال: $A[y|t] = \forall x\ \ x^2 \le t \leftarrow A = \forall x\ \ x^2 \le y$

نظریه برهان: دستگاه استنتاج طبیعی در منطق مرتبه اول.

همانطور که منطق مرتبه اول تعمیم منطق گزاره‌هاست. استنتاج طبیعی در منطق مرتبه اول نیز تعمیمی از استنتاج طبیعی ~~منطق~~ منطق گزاره‌هاست. به عبارت دیگر در اینجا همان قواعد استنتاج فصل قبل را داریم به اضافه‌ی ۴ قاعده‌ی جدید. که این ۴ قاعده، قواعد معرفی و حذف سورهای عمومی و وجودی اند.

حذف	معرفی
$\begin{array}{c} \vdots \\ \hline \forall x\ A(x) \\ \hline A[x\|t] \end{array}$	$\begin{array}{c} \vdots \\ A(x) \\ \hline \forall x\ A(x) \end{array}$ x در مقدمات استنتاج متغیر آزاد نیست.
شبیه به قانون حذف ∨: $\begin{array}{cc} [A(x)]^1 & \\ \vdots & \\ B & \exists x\ A(x) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{B} \end{array}$ x فقط در A(x) آزاد است. حذف ∃	$\begin{array}{c} \vdots \\ A[x\|t] \\ \hline \exists x\ A(x) \end{array}$

قاعده حذف ∀ نتیجه زیر را دارد.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x\ A(x) \\ \hline A(x) \end{array}$$

$A[x|x] = A(x)$ ← یک حالت خاص از حذف

قاعده معرفی ∃ دارای نتیجه زیر است.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A(x) \\ \hline \exists x\ A(x) \end{array}$$

مسأله: درخت استنتاج فرمول‌های زیر را در دستگاه استنتاج طبیعی بدست آورید.

① $\forall x\ (A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x\ B(x))$　به $x \notin FV(A)$

② $\forall x\ (A(x) \rightarrow B) \rightarrow (\exists x\ A(x) \rightarrow B)$　به $x \notin FV(B)$

③ $\forall x\ A x \rightarrow \neg \exists x\ \neg A(x)$

① : خود A می‌تواند فرمولی شامل متغیرهایی مانند x,y,z ... باشد ولی x را به عنوان متغیر آزاد ندارد. A می‌تواند x را به عنوان متغیر پابند داشته باشد

$$\dfrac{\text{حذف ۱}\quad\dfrac{\text{حذف ۲}\quad\dfrac{\forall x\ B(x)}{A\to\forall x\ B(x)}\ \text{ from }\ \dfrac{\dfrac{[\forall x\,(A\to B(x))]^1}{A\to B(x)}\qquad [A]^2}{B(x)}}{}}{\forall x\ (A\to B(x))\to(A\to\forall x\ B(x))}$$

ex: $\forall x\ (A(x)\to B)\to(\exists x\ A(x)\to B)$

$x\notin FV(B)$ که

$$\dfrac{\text{حذف ۱}\quad\dfrac{\text{حذف ۲}\quad\dfrac{\text{حذف ۳}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\ A(x)\to B]^1}{A(x)\to B}\qquad [A(x)]^3}{B}\qquad [\exists x\ A(x)]^2}{B}}{\exists x\ A(x)\to B}}{\forall x\ (A(x)\to B)\to(\exists x\ A(x)\to B)}}{}$$

$\forall x\ A(x) \rightarrow \neg\exists x\ \neg A(x)$: ex

$$\text{حذف ۱}\ \cfrac{\text{حذف ۲}\ \cfrac{\text{حذف ۳}\ \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall x\ A(x)]^{۱}}{A(x)}\qquad [\neg A(x)]^{۳}}{\bot}\qquad [\exists x\ \neg A(x)]^{۲}}{\bot}}{\neg\exists x\ \neg A(x)}}{\forall x\ A(x) \rightarrow \neg\exists x\ \neg A(x)}$$

$\exists x\ A(x) \rightarrow \neg\forall x\ \neg A(x)$: ex

$[\exists x\ A(x)]$ $\quad [A(x)]$ $\quad [\forall x\ \neg A(x)]$ فرض:

$$\text{حذف ۳}\ \cfrac{\text{حذف ۱}\ \cfrac{\text{حذف ۲}\ \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall x\ \neg A(x)]^{۱}}{\neg A(x)}\qquad [A(x)]^{۲}}{\bot}\qquad [\exists x\ A(x)]^{۳}}{\bot}}{\neg\forall x\ \neg A(x)}}{\exists x\ A(x) \rightarrow \neg\forall x\ \neg A(x)}$$

ex: $\exists x\, \exists y\, A(x,y) \to \exists y\, \exists x\, A(x,y)$

$$\text{حذف ۱}\ \dfrac{\text{حذف ۲}\ \dfrac{\text{حذف ۳}\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x,y)]^3}{\exists x\, A(x,y)}}{\exists y\, \exists x\, A(x,y)} \qquad [\exists y\, A(x,y)]^2}{\exists y\, \exists x\, A(x,y)} \qquad [\exists x\, \exists y\, A(x,y)]^1}{\exists y\, \exists x\, A(x,y)}}{\exists x\, \exists y\, A(x,y) \to \exists y\, \exists x\, A(x,y)}$$

می توانید به عنوان تمرین برعکسش را بدست بیارید

برعکس این رابطه نیز استنتاجی شبیه بالا دارد.

ex: $\exists x\, (A(x) \wedge B) \to \exists x\, A(x) \wedge B$

که $x \notin FV(B)$

$$\text{حذف ۲}\ \dfrac{\text{حذف ۱}\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x) \wedge B]^1}{A(x)}}{\exists x\, A(x)} \qquad \dfrac{[A(x) \wedge B]^1}{B}}{\exists x\, A(x) \wedge B} \qquad [\exists x\, (A(x) \wedge B)]^2}{\exists x\, A(x) \wedge B}}{\exists x\, (A(x) \wedge B) \to \exists x\, A(x) \wedge B}$$

ex: $\forall x\ (A(x) \vee B) \rightarrow (\forall x\ A(x)) \vee B$ که $x \notin FV(B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]^{2}}{\forall x\ A(x)}}{(\forall x\ A(x)) \vee B} \qquad \dfrac{[B]^{3}}{(\forall x\ A(x)) \vee B} \qquad \dfrac{[\forall x\,(A(x) \vee B)]^{1}}{A(x) \vee B}}{(\forall x\ A(x)) \vee B}$$

حذف ۲و۳ (قاعده حذف یا)

$$\dfrac{(\forall x\ A(x)) \vee B}{\forall x\ (A(x) \vee B) \rightarrow \forall x\ A(x) \vee B}$$

حذف ۱

نماد: $\vdash A$ یعنی A همان‌گو است. درخت استنتاج A را می‌توان بدست آورد.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ | \\ c\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ | \\ c\end{array} \qquad A \vee B}{c}$$

$\vdash A$ در زبان L

معنی آن اینست که A یک فرمولی ست که در هر ساختار m یک ترازه‌ای همیشه درست است. (تعمیم همانگو در منطق مرتبه اول)

مساله: در یک دهکده آرایشگری وجود دارد که موی کسانی را می‌زند که موی خودشان را نمی‌زنند این مسئله به پارادوکس آرایشگر معروف است راجع به این مطلب فکر کنید که خود این آرایشگر موی خود را آرایش می‌کند یا خیر؟ پارادوکس راسل ∴

$P \leftrightarrow \neg P$

لازم بودن علم منطق: علم استدلال و استنتاج الفبای زبان منطق گزاره‌ای

چون علم‌های مختلفی داریم پس منطق‌های مختلف داریم. مثلاً منطق دودویی.

در هر علم (تقریبا) منطق داریم.

مثال: رتبه گزاره $(\neg p \vee q) \wedge (p \to r)$ را بدست آورید.

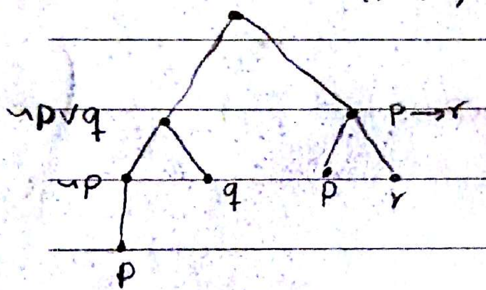
هرچه گزاره مولفه‌های بیشتری داشته باشد رتبه آن بالاتر است.

رتبه $[(\neg p \vee q) \wedge (p \to r)] = \max\{$ رتبه $(\neg p \vee q)$ و رتبه $(p \to r)\} + 1 = ۳$

$\max\{r(p), r(r)\} + 1 = 1$

$\max\{$ رتبه $\underbrace{(\neg p)}_{1}$ و رتبه $\underbrace{(q)}_{0}\} + 1 = ۲$

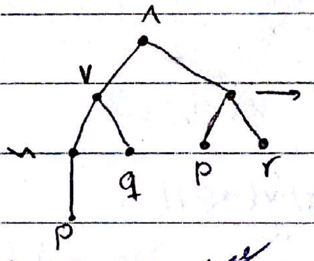
$(\neg p \vee q) \wedge (p \to r)$



مثال: درخت گزاره فوق را رسم کنید.

درخت را از پایین به بالا رسم می‌کنم

خلاصه →



[illegible]

رتبه با تعداد سطح‌های این درخت ارتباط دارد. ریشه را در نظر نگیریم این درخت سه سطح دارد.

معناشناسی منطق گزاره‌ها: یعنی ارزش و معنای گزاره مرکب چگونه تعیین می‌شود؟ توسط ارزش‌های گزاره‌های اتمی آن. و ~~[illegible]~~ جدول تعریف کننده ادوات تعیین می‌شود.

p	q		p∧q
0	0	●	0
0	1		0
1	0		0
1	1		1

یک تابع v

$$\frac{\overset{p\wedge q}{1 \quad 0}}{0}$$

$v:\{p, q\} \to \{0, 1\}$

$p \to 1$

$q \to 0$

$$v(p\to q)=v(\neg p\vee q)=v(\neg p)+v(q)-v(\neg p)\,v(q)$$

$$=1-v(p)+v(q)-(1-v(p))\,v(q)$$

$$=1-v(p)+\cancel{v(q)}-\cancel{v(q)}+v(p)\,v(q)$$

$$=1-v(p)+v(p)\,v(q)$$

	p	q	$(p\wedge q)\vee\neg p$
v_1	0	0	1
v_2	0	1	1
v_3	1	0	0
v_4	1	1	1

به هرکدام از v_1 - v_4 یک تعبیر گوییم.

$$v_3:\ \underbrace{\underset{1}{(p\wedge q)}\vee\underset{0}{\neg p}}_{0}$$

$v_1(p)=0 \quad v_1(q)=0$

$v_1\big((p\wedge q)\vee(\neg p)\big)=1$

$v_3 \not\models (p\wedge q)\vee\neg p$

$v_2 \models (p\wedge q)\vee\neg p \xrightarrow{\text{می‌خوانیم}}$ گزاره $(p\wedge q)\vee\neg p$ تحت تعبیر v_2 برقرار است.

تابع تعبیر $\models$ گزاره

طور دیگری نیز می‌توان از این نماد استفاده کرد.

یک تعداد گزاره $\models$ یک گزاره

$$\underset{\text{مجموعه‌ای از گزاره‌ها}}{\Gamma}\models\underset{\text{یک گزاره}}{A}$$

می‌خوانیم: A نتیجه قطعی گزاره‌های موجود در Γ است
(معناشناسی)

مثال:

$\{p, p\to q\} \models q$

$p, p \to q \models q$

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ستون ها را جا به جا کنیم

p	$p\to q$	q
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

هر وقت باهم یک بودند → باید ۱ باشه.

مثال:

$(p\wedge q)\vee\neg p, \ p \models p\wedge q$

p	q	$(p\wedge q)\vee\neg p$	p	$p\wedge q$	$p\vee q$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

درست است. ✓ درست است

پس $p\vee q$ را هم نتیجه میدهد

$(p\wedge q)\vee\neg p, \ p \models p\vee q$

p	q	$p\vee q$	$\neg p$	q	p
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1

$p\vee q, \neg p \models q$ $p\vee q, \neg p \not\models p$

$\underset{\text{گزاره}}{\models A} \xleftrightarrow{\text{تعریف نماد}} \forall v$ تعبیر v $\quad v(A)=1 \qquad v \models A$

یعنی A همانگو است. (A تحت همه‌ی تعبیر یک است)

فرض کنید که A گزاره‌ای شامل اتم p است و B یک گزاره مرکب باشد.

$\models A \longrightarrow \models A[p|B]$

یعنی در گزاره A همه جا به جای اتم p گزاره B را گذاشتیم

$(p\wedge q)[p/p\vee r] = (p\vee r)\wedge q$

تولید همان‌گوی جدید از روی همان‌گوی قبلی.

P	A	B	A[P/B]
0	1	0	1
⋮	⋮	1	1
⋮	⋮	0	⋮
0		1	⋮
1		⋮	1
⋮		⋮	
1	1		T
	T		

ارزش گزاره A یک است و به p یا اتم‌های دیگر داخل آن بستگی ندارد.

تمرین: نشان دهید اگر $\models A$ و $\models A\to B$ آنگاه $\models B$.

تابع تعبیر دلخواه v را داریم. فرض می‌کنیم $v(B)=0$. از طرفی چون A و $A\to B$ همان‌گو هستند.

$v(A)=1 \;,\; v(\underset{1}{A}\to \underset{0}{B})=1$

ولی این تناقض است چون $v(B)=0$ پس $v(B)=1$

لذا:

$\forall v$ تعبیر v : $v(B)=1$

بنابراین $\models B$

(A و B ممکن است مرکب باشند)

مسئله تعیین همانگو بودن یک گزاره در منطق گزاره‌ها تصمیم‌پذیر است یا خیر؟ تصمیم‌پذیر است یعنی می‌توان طبق فرایندی (الگوریتمی) تعیین کرد که یک گزاره همانگو هست یا خیر.

آن الگوریتم جدول ارزش است.

حسن جدول ارزش یک الگوریتم برای تعیین ارزش گزاره است.

عیب الگوریتم جدول ارزش آن است که در زمان چندجمله‌ای صورت نمی‌گیرد به عبارتی اگر ما n گزاره اتمی داشته باشیم جدول 2^n سطر دارد

قاعده دمورگان :

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

تبدیل به همانگو می‌کنیم :

$$\neg(p \vee q) \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

یعنی اگر $A \equiv B$ آنگاه $A \longleftrightarrow B$ همانگو است.

تعریف :

$$p \longleftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

ادات شفر : $p | q = \neg(p \wedge q)$ همه ادوات برحسب | نوشته می‌شود.

تمرین : نشان دهید نمی‌توان همه ادوات را برحسب $\wedge$ نوشت؟

$$p \vee q \neq \left| \begin{array}{l} p \wedge p \\ q \wedge p \\ p \wedge q \\ q \wedge q \end{array} \right.$$

اگر بخواهیم $p \vee q$ را برحسب اتم‌هایش و ادات $\wedge$ بنویسیم آنگاه $p \vee q$ به یکی از ۴ صورت زیر نوشته می‌شود.

حالا از روی جدول ارزش آن‌ها می‌توان دید که $p \vee q$ به صورت هیچ کدام از اشکال فوق نیست.

نظریه برهان: دستگاه استنتاج طبیعی، چگونه از روی حکم‌هایی که داریم، حکم‌های جدیدی نتیجه بگیریم.

$\neg\neg A \to A$

$$\text{حذف ۲}\ \dfrac{\text{حذف ۱}\ \dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \qquad [\neg\neg A]^2}{\bot}}{A}}{\neg\neg A \to A}$$

قاعده:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^1\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^1\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}$$

$\neg(A \wedge \neg A)$

$$\text{حذف ۱}\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge\neg A]^1}{A} \qquad \dfrac{[A\wedge\neg A]^1}{\neg A}}{\bot}}{\neg(A\wedge\neg A)}$$