p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

یادآوری

در گزاره‌ی شرطی $p \to q$ ، p را مقدم و q را تالی می‌نامیم.

با استفاده از جدول درمی‌یابیم که

① اگر در یک گزاره‌ی شرطی مقدم نادرست باشد، آنگاه ارزش کل گزاره درست است.

② اگر در یک گزاره‌ی شرطی، تالی درست باشد آنگاه ارزش کل گزاره درست است.

اثبات‌هایی که از قاعده‌ی ① پیروی می‌کنند، اثبات به انتفای مقدم نامیده می‌شوند.

گزاره‌ی شرطی $p \to q$ به روش‌های دیگر نیز خوانده می‌شود. از جمله

p تنها اگر q

p شرط کافی برای q است.

q شرط لازم برای p است.

p ، q را نتیجه می‌دهد.

⑤ ترکیب دوشرطی

نماد $\leftrightarrow$

$p \leftrightarrow q$: p اگر و تنها اگر q

مثال. در یک مثلث $\underbrace{\text{دو ضلع برابرند}}_{p}$ اگر و تنها اگر $\underbrace{\text{زوایای نظیر با هم برابر باشند}}_{q}$.

نماد ریاضی: $p \leftrightarrow q$.

توجه کنید $p \leftrightarrow q$ بدین معنی است که p، q را نتیجه می‌دهد و q هم p را نتیجه می‌دهد. به عبارت دیگر:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$$

جدول ارزش ترکیب دوشرطی

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

توجه کنید ترکیب دوشرطی دو گزاره در صورتی درست است که ارزش هر دوها مثل هم باشد.

تعریف. گزاره‌های P و Q را معادل یا هم‌ارز می‌گوییم هرگاه ارزش یکسان داشته باشند، در چنین حالتی می‌نویسیم $P \equiv Q$.

یکی از روشهای تشخیص هم‌ارزی دو گزاره‌ی ترکیبی، استفاده از جدول است.

مثال. نشان دهید $P \land P \equiv P$.

P	P	$P \land P$
T	T	T
F	F	F

$$P \land P \equiv P$$

مثال. نشان دهید $\sim(p \land q) \equiv \sim p \lor \sim q$

p	q	$p \land q$	$\sim(p \land q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \lor \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

مثال. نشان دهید $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

تعریف. گزاره‌ی همیشه درست را راستگو نامیده و با T نشان می‌دهیم. همچنین گزاره‌ی همیشه نادرست را تناقض نامیده و با F نشان می‌دهیم.

مثال. نشان دهید $p\wedge(\sim p)\equiv F$

p	$\sim p$	$p\wedge(\sim p)$	F
T	F	F	F
F	T	F	F

مثال. نشان دهید $p\vee(\sim p)\equiv T$

p	$\sim p$	$p\vee(\sim p)$	T
T	F	T	T
F	T	T	T

مثال. نشان دهید $p\wedge T\equiv p$

p	T	$p\wedge T$
T	T	T
F	T	F

قوانین زیر همگی برقرارند.

۱) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
۲) $p \vee q \equiv q \vee p$
جابجایی

۳) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
۴) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
شرکت پذیری

۵) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
۶) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
پخش (توزیع پذیری)

۷) $p \wedge p \equiv p$
۸) $p \vee p \equiv p$
خودتوانی

۹) $p \wedge T \equiv p$
۱۰) $p \vee F \equiv p$
خنثی

۱۱) $p \wedge F \equiv F$
۱۲) $p \vee T \equiv T$
غلبه

۱۳) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
۱۴) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
دمورگان

۱۵) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
۱۶) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
جذب

۱۷) $p \to q \equiv \sim p \vee q$ رفع مولفه

۱۸) $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ عکس نقیض

۱۹) $p \wedge (\sim p) \equiv F$

۲۰) $p \vee (\sim p) \equiv T$

تمرین: روابط بالا را اثبات کنید. (هرکدام را توانستید بدون استفاده از جدول و با استفاده از قوانین دیگر اثبات کنید.)

مسأله. نشان دهید $(p\to q)\vee(r\to s)\equiv(p\wedge r)\to(q\vee s)$.

حل.

$$(p\to q)\vee(r\to s)$$

$$\equiv(\sim p\vee q)\vee(\sim r\vee s)$$

$$\equiv\sim p\vee q\vee\sim r\vee s$$

$$\equiv\underbrace{\sim p\vee\sim r}\vee q\vee s$$

$$\equiv\sim(p\wedge r)\vee(q\vee s)$$

$$\equiv(p\wedge r)\to(q\vee s)$$

مسأله. نقیض ترکیب شرطی را محاسبه کنید.

حل. $\sim(p\to q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$

مسأله. نشان دهید $\sim(p\leftrightarrow q)\equiv\sim p\leftrightarrow q\equiv p\leftrightarrow\sim q$

حل. اثبات به طریق جدول

p	q	$p\leftrightarrow q$	$\sim(p\leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p\leftrightarrow q$	$\sim q$	$p\leftrightarrow\sim q$
T	T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T	F

مسأله. قانون عکس نقیض را اثبات کنید.

حل. $\sim q\to\sim p\equiv\sim(\sim q)\vee(\sim p)\equiv q\vee\sim p$

$$\equiv\sim p\vee q\equiv p\to q$$

مسأله. ثابت کنید $p \to q \equiv (p \wedge \sim q) \to F$.

حل. از طرف دوم شروع می‌کنیم:

$$(p \wedge \sim q) \to F \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee F \equiv (\sim p \vee q) \vee F$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \equiv p \to q$$

تعریف: قانون بالا را برهان خلف می‌گوئیم.

مسأله. ثابت کنید $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

حل.

$$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge T) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv p \wedge (\underbrace{T \vee q}_{T}) \equiv p \wedge T \equiv p$$

مسأله. نشان دهید $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

حل،

$$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv p \vee (\underbrace{F \wedge q}_{F}) \equiv p \vee F \equiv p$$

استلزام منطقی

تعریف گزاره‌ی شرطی همواره درست یک استلزام منطقی نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر گزاره‌ی $p \to q$ درست باشد آنگاه آن را یک استلزام منطقی نامیده و می‌نویسیم $p \Rightarrow q$. ($p \Rightarrow q$ را می‌خوانیم p نتیجه می‌دهد q).

مثال. $p \Rightarrow p$ یک استلزام منطقی است، زیرا

$$p \to p \equiv \sim p \vee p \equiv T$$

مثال، $F \Rightarrow p$ یک استلزام منطقی است،

مثال. $T \Rightarrow p$ یک استلزام منطقی است.

مسأله. نشان دهید $p \wedge q \Rightarrow p$ استلزام منطقی است.

حل. $(p \wedge q) \to p \equiv \sim(p \wedge q) \vee p \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee p$

$\equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \vee \sim q \equiv T \vee (\sim q) \equiv T$

مسأله. ثابت کنید $p \to p \vee q$ یک استلزام منطقی است.

حل. $p \to (p \vee q) \equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \vee q$

$\equiv T \vee q \equiv T$

تعریف. $p \wedge q \Rightarrow p$ را قانون اختصار و $p \Rightarrow p \vee q$ را قانون جمع می‌نامیم.

سورها

تعریف. جملاتی که در آنها از متغیر یا متغیرهائی مانند x و y استفاده شده باشد، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را با نماد $P(x)$ یا $Q(x,y)$ و ... نشان می‌دهیم.

مثال. $x > 0$ یک گزاره‌نماست. این گزاره‌نما را می‌توان با $P(x)$ نشان داد.

مثال. $x + y = 0$ یک گزاره‌نماست. این گزاره‌نما را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم.

توجه. گزاره‌نماها لزوماً گزاره نیستند. به عنوان مثال در مجموعه‌ی اعداد حقیقی، گزاره‌نمای $P(x): x > 0$ را در نظر بگیرید.

براحتی می‌توان دید به ازای $x = 1$، گزاره‌نمای بالا گزاره‌ای درست و به ازای $x = -1$، این گزاره‌نما، گزاره‌ای نادرست خواهد بود. بنابراین همواره درست یا همواره نادرست نیست و در نتیجه یک گزاره نیست.

تعریف. فرض کنید $p(x)$ یک گزاره‌نما باشد. مجموعه‌ای که متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما از آن انتخاب می‌شوند، عالم سخن نامیده می‌شود.

در مثال قبل در گزاره‌نمای $p(x): x > 0$ ، عالم سخن را مجموعه‌ی اعداد حقیقی گرفتیم.

تعریف. سورها عبارتها یا اصطلاحاتی هستند که قبل از گزاره‌نماها آمده و آن‌ها را به گزاره تبدیل می‌کنند.

مثال. در گزاره‌نمای $p(x): x > 0$ و عالم سخن اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) جملات زیر گزاره هستند.

همواره $x > 0$ ، هیچگاه $x > 0$ ، بعضی مواقع $x > 0$.

xای وجود دارد که $x > 0$ ، تنها یک x وجود دارد که $x > 0$ و ...

سورهای مهم عبارتند از:

همیشه، همواره، برای هر، بازای هر، ...

وجود دارد، بازای یک، هست و ...

همان گونه که ملاحظه می‌شود، سورهای دسته‌ی اول بر همه دلالت دارد در حالیکه سورهای دسته‌ی دوم بر وجود داشتن دلالت دارد.

سورهای دسته اول را سور عمومی و سورهای دسته‌ی دوم را سور وجودی می‌نامیم و برای آنها به ترتیب نمادهای $\forall$ و $\exists$ را بکار می‌بریم.

مثال. جمله‌ی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

هر عدد حقیقی مثبت است.

حل. $p(x): x > 0$ ، عالم سخن: $\mathbb{R}$

نماد ریاضی: $\forall x \quad p(x)$

مثال. بعضی دانش آموزان، درسخوان هستند.

حل. عالم سخن: تمام دانش آموزان

$P(x)$: x درس خوان است.

نماد ریاضی: $\exists x \ \ P(x)$

مثال. هر عدد حقیقی، قرینه دارد.

حل. عالم سخن: مجموعه‌ی اعداد حقیقی

$P(x)$: x دارای قرینه است.

نماد ریاضی: $\forall x \ \ P(x)$

روش دوم. در این روش داشتن قرینه را نیز ترجمه می‌کنیم

نماد ریاضی: $\forall x \ \ \exists y \ \ x+y=0$

مثال. هر دانشجوئی که درس بخواند، موفق می‌شود.

حل. عالم سخن: تمام دانشجویان

$P(x)$: x درس می‌خواند

$Q(x)$: x موفق می‌شود.

نماد ریاضی: $\forall x \ \ (P(x) \longrightarrow Q(x))$

مثال. هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است.

حل. عالم سخن: مجموعه‌ی توابع

$P(x)$: x مشتق پذیر است.

$Q(x)$: x پیوسته است.

نماد ریاضی: $\forall x (P(x) \longrightarrow Q(x))$

مثال. هرکه نان از عمل خویش خورد   منت از حاتم طائی نبرد

حل. عالم سخن: انسان ها

$P(x)$: x نان از عمل خود می‌خورد.

$Q(x)$: x منت از حاتم طائی ببرد

نماد ریاضی: $\forall x\,(P(x) \to \sim Q(x))$

نقیض سورها

عالم سخن $\{1,2,3\}$

$$\forall x\ P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \quad (1)$$

$$\forall x\ \sim P(x) \equiv \sim P(1) \wedge \sim P(2) \wedge \sim P(3) \quad (2)$$

$$\exists x\ P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3) \quad (3)$$

$$\exists x\ \sim P(x) \equiv \sim P(1) \vee \sim P(2) \vee \sim P(3) \quad (4)$$

$$\sim(\underset{(1)}{\forall x\ P(x)}) \equiv \underset{(4)}{\exists x\ \sim P(x)}$$

$$\sim(\underset{(3)}{\exists x\ P(x)}) \equiv \underset{(2)}{\forall x\ \sim P(x)}$$

مثال. نقیض گزاره‌ی زیر را به زبان ریاضی و فارسی بنویسید.

هر که نان از عمل خویش خورد   منت از حاتم طائی نبرد

حل. عالم سخن: انسان‌ها

$P(x)$: x نان از عمل خویش می‌خورد

$Q(x)$: x منت از حاتم طائی می‌برد

نماد ریاضی: $\forall x \; (P(x) \longrightarrow \sim Q(x))$

نقیض جمله‌ی بالا: $\exists x \; \sim (P(x) \longrightarrow \sim Q(x))$

$$\equiv \exists x \; (P(x) \wedge Q(x))$$

توجه کنید $\sim(P \to q) \equiv p \wedge \sim q$ و البته $\sim(p \to \sim q) \equiv p \wedge q$

مثال. نقیض جمله‌ی زیر را به زبان ریاضی و فارسی بنویسید.

هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است.

حل. عالم سخن: مجموعه‌ی توابع

$P(x)$: x مشتق پذیر است.

$Q(x)$: x پیوسته است.

نماد ریاضی: $\forall x (P(x) \longrightarrow Q(x))$

نقیض جمله‌ی بالا: $\exists x \; \sim (P(x) \longrightarrow Q(x))$

$$\equiv \exists x \; (P(x) \wedge \sim Q(x))$$

نقیض به زبان فارسی: تابع مشتق پذیری هست که پیوسته نباشد.

یا: تابعی وجود دارد که مشتق پذیر است ولی پیوسته نیست.

قواعد استنتاج

تعریف. فرض کنید P_1، P_2، ...، P_n و Q گزاره‌هایی باشند بطوریکه درستی P_1، P_2، ... و P_n درستی Q را نتیجه دهد. دراین صورت گوئیم استنتاج $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \longrightarrow Q$ معتبراست واغلب می‌نویسیم

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

مثال. نشان دهید استنتاج زیر معتبراست.

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

حل. بوضوح اگر p و q گزاره‌ای درست باشند آنگاه $p \wedge q$ نیز درست است. پس استنتاج معتبراست.

مثال. نشان دهید استنتاج زیر معتبراست.

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

حل. بوضوح اگر p درست باشد آنگاه $p \vee q$ نیز درست خواهد بود.

مثال. نشان دهید استنتاج زیر معتبراست.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

حل. p گزاره‌ای درست است بعلاوه $p \rightarrow q$ نیز درست است. درچنین حالتی q نمی‌تواند نادرست باشد. زیرا در غیراینصورت $p \rightarrow q$ نادرست خواهد بود. پس q گزاره‌ای درست است ولذا استنتاج معتبر است.

مثال. نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

حل. ادعا می‌کنیم اگر $p \to q$ و $q \to r$ درست باشند آنگاه $p \to r$ نیز درست است زیرا در غیر اینصورت $p \to r$ نادرست است. بنابراین p درست و r نادرست است.

حال دو حالت رخ می‌دهد.

الف. q درست باشد. در این صورت از آنجا که r نادرست است لذا $q \to r$ نیز نادرست خواهد بود که $\times$ است.

ب. q نادرست باشد. در این حالت از درستی p نتیجه می‌شود $p \to q$ نادرست است که $\times$ است.

پس درستی $p \to q$ و $q \to r$ درستی $p \to r$ را نتیجه می‌دهد.

قواعد استنتاج

برای بررسی اعتبار یک استنتاج می‌توان از قوانین استنتاج استفاده کرد. مهمترین این قوانین عبارتند از:

① $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$ رفع مؤلفه

② $$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$ قیاس موجب (مثبت)

③ $$\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$ قیاس منفی

④ $$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$ تعدی

⑤ $\dfrac{p}{\therefore\ p \vee q}$ جمع

⑥ $\dfrac{p \wedge q}{\therefore\ p}$ اختصار

⑦ $\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \end{array}}{\therefore\ p \wedge r \to q \wedge s}$ قیاس ذوالوجهین

⑧ $\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \end{array}}{\therefore\ p \vee r \to q \vee s}$

توجه کنید از قوانین بالا و در استفاده از قوانین هم‌ارزی گزاره که می‌توان اعتبار استنتاجی را نشان داد.

مثال. نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

① $p \vee q \to r \wedge s$

② $\dfrac{\sim r}{\therefore\ \sim q}$

حل.

② $\sim r$

③ $\therefore \sim r \vee \sim s$ جمع

③ $\sim r \vee \sim s \equiv \sim (r \wedge s)$

$$\dfrac{① \ (p \vee q) \to (r \wedge s)}{\therefore\ \sim (p \vee q)} \ ④$$ قیاس منفی

④ $\sim (p \vee q) \equiv \dfrac{\sim p \wedge (\sim q)}{\therefore\ \sim q}$ اختصار

مثال: نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

① $p \wedge (q \vee r)$
② $(p \wedge q) \to s$
③ $(p \wedge r) \to t$
④ $\sim s$
$\therefore t$

① $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

② $(p \wedge q) \to s$
③ $(p \wedge r) \to t$
$\therefore (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to s \vee t$ ⑤

⑤ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to s \vee t$
① $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$\therefore s \vee t$ ⑥

⑥ $s \vee t$
④ $\sim s$
$\therefore t$

پس استنتاج معتبر است.

مثال: آیا استنتاج زیر معتبر است؟

① $p \wedge (q \vee r)$
② $p \to (q \to s)$
③ $r \to (p \to t)$
④ $\sim s$
$\therefore t$

توجه کنید :

(۲) $p \to (q \to s)$

$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee s)$

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee s$

$\equiv \sim (p \wedge q) \vee s$

$\equiv (p \wedge q) \to s$

به همین صورت :

(۳) $r \to (p \to t) \equiv (r \wedge p) \to t$

$\equiv (p \wedge r) \to t$

پس این شکل همان رستنتاج مثال قبل است با این تفاوت که به جای سطرهای (۲) و (۳) معادلهای آن قرار گرفته اند.

تمرینهای صفحه ۷ ، ۱۱ ، ۱۸ ، ۲۰ ، ۲۲ ، ۲۵ ، ۲۹

۱۸	۲۰	۲۲	۲۵	۲۹
۶	۱	۱	۴	همه
۷	۳	۲		
۸	۴	۱۲		
۱۱	۵	۱۳		
۱۶		۱۵		
۲۰		۱۶		
		۱۷		

نظریه مجموعه‌ها

مجموعه یکی از مفاهیم نخستین (تعریف نشده) در ریاضیات است، بنابراین آنچه بیان می‌کنیم تعریف مجموعه نیست بلکه شناسائی آن است.

تعریف. مجموعه تشکیل شده از اشیائی با خاصیتی معین.

مجموعه‌ها معمولاً با حروف بزرگ لاتین نمایش داده می‌شوند و اعضای آن درون دو ابرو قرار می‌گیرند.

مثال: $A=\{1,2,\dots,10\}$ مجموعه‌ای است شامل ده عدد طبیعی ابتدائی.

عضویت: اجزای تشکیل دهنده‌ی یک مجموعه، اعضای آن نامیده می‌شوند. اگر a عضوی از A باشد می‌نویسیم $a\in A$.

زیرمجموعه بودن:

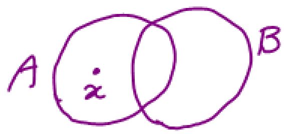
تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت A را زیرمجموعه‌ی B می‌نامیم هرگاه هر عضو A، عضوی از B نیز باشد. در چنین حالتی می‌نویسیم $A\subseteq B$. به عبارت دیگر

$$A\subseteq B \equiv \forall x\,(x\in A \rightarrow x\in B)$$

با محاسبه‌ی نقیض عبارت بالا، می‌توان تعریف زیرمجموعه نبودن را به دست آورد.

$$A\nsubseteq B \equiv \exists x\,(x\in A \wedge x\notin B)$$

$A\subseteq B$



$A\nsubseteq B$

مسأله ۱. فرض کنید A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. نشان دهید $A \subseteq A$.

حل. بنا به تعریف باید نشان دهیم

$$(A\subseteq A) \equiv \forall x\,(\underbrace{x\in A}_{p} \to \underbrace{x\in A}_{p})$$

از این که گزاره‌ی $p \to p$ همواره درست است لذا گزاره‌ی سمت راست همواره برقرار است و در نتیجه $A\subseteq A$.

تعریف. مجموعه‌ی تهی که با نماد $\emptyset$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای است که شامل هیچ عضوی نیست.
به عبارت دیگر $x\in\emptyset$ عبارتی همواره نادرست است.

مسأله ۲. نشان دهید برای هر مجموعه‌ی دلخواه A، $\emptyset\subseteq A$.

حل. $\emptyset \subseteq A \equiv \forall x\,(\underbrace{x\in\emptyset}_{F} \to \underbrace{x\in A}_{p})$

از این که گزاره‌ی شرطی $F\to p$ همواره درست است لذا گزاره‌ی سمت راست درست بوده و در نتیجه $\emptyset\subseteq A$.

تعریف. مجموعه‌ی مرجع یا جهانی، مجموعه‌ای است شامل تمام اعضا. این مجموعه را با نماد U نشان می‌دهیم.
به عبارت دیگر $x\in U$ عبارتی همواره درست است.

مسأله ۳. نشان دهید برای هر مجموعه‌ی A، $A\subseteq U$.

حل. باید نشان دهیم $\forall x\,(\underbrace{x\in A}_{p} \to \underbrace{x\in U}_{T})$.

از این که گزاره‌ی $p\to T$ همواره درست است لذا عبارت سمت راست درست بوده و در نتیجه $A\subseteq U$.

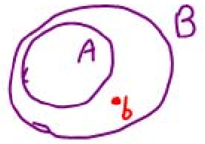
تساوی دو مجموعه.

تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. گوییم A با B مساوی است و می‌نویسیم $A=B$،

هرگاه هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد،
به عبارت دیگر

$$A=B \equiv A\subseteq B \wedge B\subseteq A$$

تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. A را زیرمجموعه‌ی سره‌ی B می‌نامیم هرگاه
$A\subseteq B$ ولی $A\neq B$. در چنین حالتی می‌نویسیم $A\subset B$ یا $A\subsetneq B$



به عبارت دیگر:

$$A\subset B \equiv A\subseteq B \wedge (\exists b\in B \quad b\notin A)$$

مسأله. فرض کنید A، B و C مجموعه باشند. اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه
$A\subseteq C$.

حل:

$$A\subseteq B \equiv \forall x\,(x\in A \longrightarrow x\in B)$$
$$B\subseteq C \equiv \forall x\,(x\in B \longrightarrow x\in C)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\therefore\ \forall x\,(x\in A \longrightarrow x\in C) \equiv A\subseteq C$$

نکته: اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه $A\subseteq B$ بدین معنی است که $A\subset B$
یا $A=B$. به عبارت دیگر

$$A\subseteq B \equiv A\subset B \vee A=B$$

اکنون قرار می‌دهیم $p: A\subset B$ و $q: A=B$. در این صورت
$A\subseteq B \equiv A\subset B \vee A=B \equiv p\vee q$.

بنابراین:

$p: A\subset B$

$q: A=B$

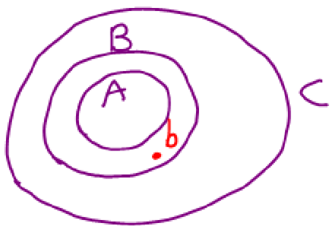
$p\vee q: A\subseteq B$

بنا به قانون جمع $P\longrightarrow P\vee q$. بنابراین با جاگذاری خواهیم داشت:

$$A\subset B\longrightarrow A\subseteq B$$

مسأله. فرض کنید A، B و C مجموعه‌هایی باشند که $A\subset B$ و $B\subseteq C$. نشان دهید $A\subset C$.

حل. روش اول: از این که $A\subset B$ لذا $A\subseteq B$ و البته $b\in B$ موجود است که $b\notin A$. همچنین $B\subseteq C$. بنابراین $A\subseteq C$. اکنون باید نشان دهیم C شامل عضوی است که در A نیست. از این که $B\subseteq C$ و $b\in B$ لذا $b\in C$. درحالیکه $b\notin A$. پس $A\subset C$.



روش دوم. از این که $A\subset B$ لذا $A\subseteq B$. همچنین $B\subseteq C$. بنابراین $A\subseteq C$.
اکنون کافی است نشان دهیم $A\neq C$. فرض کنید (فرض خلف) $A=C$. در این صورت از این که $B\subseteq C$ نتیجه می‌شود $B\subseteq A$ و این متناقض است با این که $A\subset B$. چون

$A\subset B: \quad \exists b\in B \quad b\notin A$

$B\subseteq A: \quad \forall b\in B \quad b\in A$

پس $A\neq C$ و لذا $A\subset C$.

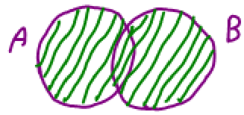
اعمال روی مجموعه‌ها

۱ـ اجتماع دو مجموعه:

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت اجتماع A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \ \vee\ x\in B\}$$

به عبارت دیگر: $x\in A\cup B \equiv x\in A \ \vee\ x\in B$



$A\cup B$

مسأله. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. نشان دهید $A\subseteq A\cup B$.

حل. باید نشان دهیم $\forall x\,(x\in A \to x\in A\cup B)$

به عبارت دیگر باید ثابت کنیم: $\forall x\,(\underbrace{x\in A}_{p} \to \underbrace{x\in A}_{p} \vee \underbrace{x\in B}_{q})$

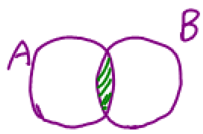
و بنا به قانون جمع رابطه‌ی اخیر برقرار است. پس $A\subseteq A\cup B$.

۲ـ اشتراک دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت اشتراک A و B عبارت است از

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \ \wedge\ x\in B\}$$

به عبارت دیگر: $x\in A\cap B \equiv x\in A \ \wedge\ x\in B$



$A\cap B$

مسأله. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. نشان دهید $A\cap B\subseteq A$.

حل. باید ثابت کنیم: $\forall x\,(x\in A\cap B \longrightarrow x\in A)$

به عبارت دیگر باید نشان دهیم: $\forall x\,(\underbrace{x\in A}_{p} \wedge \underbrace{x\in B}_{q} \longrightarrow \underbrace{x\in A}_{p})$

و حکم اخیر بنا به قانون اختصار همواره برقرار است. بنابراین $A\cap B\subseteq A$.

مسأله. ثابت کنید: الف) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ب) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

حل. الف)

$$x\in A\cap(B\cup C) \equiv x\in A \wedge x\in(B\cup C)$$
$$\equiv \underbrace{x\in A}_{p} \wedge (\underbrace{x\in B}_{q} \vee \underbrace{x\in C}_{r})$$
$$\equiv (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\in C)$$
$$\equiv x\in(A\cap B) \vee x\in(A\cap C)$$
$$\equiv x\in (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

بنابراین $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

اثبات ب) مشابه است.

مسأله. ثابت کنید الف) $A\cap\emptyset=\emptyset$ ب) $A\cap U=A$

ج) $A\cup\emptyset=A$ د) $A\cup U=U$

اثبات. الف) $x\in A\cap\emptyset \equiv \underbrace{x\in A}_{p} \wedge \underbrace{x\in\emptyset}_{F} \equiv F \equiv x\in\emptyset$

بنابراین $A\cap\emptyset=\emptyset$.

ب) $x\in A\cap U \equiv \underbrace{x\in A}_{p} \wedge \underbrace{x\in U}_{T} \equiv p \equiv x\in A$

پس $A\cap U=A$. اثبات بقیه مشابه است.

مسأله. ثابت کنید الف) $A\cap(A\cup B)=A$ ب) $A\cup(A\cap B)=A$

حل. الف) $x\in A\cap(A\cup B)\equiv x\in A\wedge(x\in A\cup B)$

$$\equiv \underbrace{x\in A}_{p}\wedge(\underbrace{x\in A}_{p}\vee\underbrace{x\in B}_{q})\equiv p\wedge(p\vee q)\equiv p\equiv x\in A$$

بنابراین $A\cap(A\cup B)=A$. اثبات ب) مشابه است.

روش دوم) الف) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

$$=A\cup(\varnothing\cap B)=A\cup\varnothing=A$$

دو قانون بالا، قوانین جذب نامیده می‌شوند.

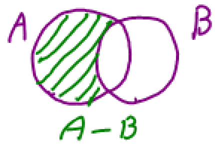
۳- تفاضل دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. تفاضل A و B عبارت است از

$$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

به عبارت دیگر: $x\in A-B\equiv x\in A\wedge x\notin B$

$$\equiv x\in A\wedge\sim(x\in B)$$

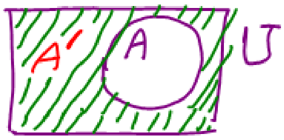


۴- متمم یک مجموعه

فرض کنید A یک مجموعه باشد. در این صورت متمم A عبارت است از

$$A'=\{x\mid x\notin A\}$$

به عبارت دیگر $x\in A'\equiv x\notin A\equiv\sim(x\in A)$



توجه کنید با توجه به تعریف متمم:

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}=U-A$$

مسأله. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. نشان دهید

الف) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ ب) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

حل. الف) $x\in(A\cap B)'\equiv x\notin(A\cap B)\equiv\sim[x\in(A\cap B)]$

$$\equiv\sim[\underbrace{x\in A}_{p}\wedge\underbrace{x\in B}_{q}]\equiv\sim p\vee\sim q$$

$$\equiv\sim(x\in A)\vee\sim(x\in B)\equiv x\in A'\vee x\in B'$$

$$\equiv x\in(A'\cup B')$$

پس $(A\cap B)'=A'\cup B'$. اثبات ب) مشابه است.

این دو قانون را قوانین دمرگان می‌گوییم.

مسأله. اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه $A-B=A\cap B'$.

حل. $x\in A-B\equiv x\in A\wedge x\notin B$

$$\equiv x\in A\wedge x\in B'\equiv x\in A\cap B'$$

پس $A-B=A\cap B'$.

مسأله. نشان دهید الف) $A-\emptyset=A$ ب) $\emptyset-A=\emptyset$

ج) $A-A=\emptyset$ د) $A-U=\emptyset$.

حل. د) $A-U = A\cap U' = A\cap \emptyset = \emptyset$

توجه کنید $U'=\emptyset$ و $\emptyset' = U$.

اثبات بقیه مشابه است.

مسأله. ثابت کنید $A-B = A-(A\cap B)$.

حل. $A-(A\cap B) = A\cap (A\cap B)' = A\cap (A'\cup B')$ سمت راست

$$= (A\cap A')\cup(A\cap B') = \emptyset \cup (A\cap B') = A\cap B' = A-B$$

بدین ترتیب با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و یا اثبات بطور مستقیم می‌توان خواص زیر را ثابت کرد.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & A\cap B = B\cap A \\ (2) & A\cup B = B\cup A \end{array}\right\}$$ قوانین جابجایی

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & A\cap (B\cap C) = (A\cap B)\cap C \\ (4) & A\cup (B\cup C) = (A\cup B)\cup C \end{array}\right\}$$ شرکت‌پذیری

$$\left.\begin{array}{ll} (5) & A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C) \\ (6) & A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C) \end{array}\right\}$$ قوانین پخش

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & A\cap A = A \\ (8) & A\cup A = A \end{array}\right\}$$ خودتوانی

$$\left.\begin{array}{ll} (9) & A\cap U = A \\ (10) & A\cup \emptyset = A \end{array}\right\}$$ خنثی

$$\left.\begin{array}{ll} (11) & A\cap \emptyset = \emptyset \\ (12) & A\cup U = U \end{array}\right\}$$ غلبه

$$\left.\begin{array}{ll} (13) & (A\cap B)' = A'\cup B' \\ (14) & (A\cup B)' = A'\cap B' \end{array}\right\}$$ دمورگان

(۱۵) $A\cap(A\cup B)=A$ (۱۶) $A\cup(A\cap B)=A$ } جذب

(۱۹) $A\cap A'=\varnothing$ (۲۰) $A\cup A'=U$

با هر کدام از تبدیلات زیر می‌توان از روابط منطق گزاره به روابط معادل در جبر مجموعه‌ها رسید:

$$p \quad q \quad r \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \overset{\equiv}{\longleftrightarrow} \quad \sim \quad F \quad T$$

$$A \quad B \quad C \quad \cap \quad \cup \quad \subseteq \quad = \quad ' \quad \varnothing \quad U$$

مسئله. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند بطوریکه $A\subseteq B$. نشان دهید $B'\subseteq A'$.

حل:

$$A\subseteq B \equiv \forall x\,(x\in A \longrightarrow x\in B)$$

(عکس نقیض) $\equiv \forall x\,(\sim(x\in B) \longrightarrow \sim(x\in A))$

$$\equiv \forall x\,(x\in B' \longrightarrow x\in A') \equiv B'\subseteq A'$$

خانواده‌ی مجموعه‌های اندیس‌دار

فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای باشد که عناصر آن نیز مجموعه باشند. در این صورت مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را خانواده‌ای از مجموعه‌ها می‌نامیم. به عنوان مثال

$$\mathcal{A}=\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

خانواده‌ای از مجموعه‌ها است.

فرض کنید $A_1=\mathbb{N}$، $A_2=\mathbb{Z}$، $A_3=\mathbb{Q}$، $A_4=\mathbb{R}$ و $A_5=\mathbb{C}$.

در این صورت $\mathcal{A}=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. همچنین می‌توان نوشت $\mathcal{A}=\{A_i \mid i\in\{1,2,3,4,5\}\}$ و اگر قرار دهیم $I=\{1,2,3,4,5\}$، آنگاه $\mathcal{A}=\{A_i \mid i\in I\}$، در چنین حالتی می‌گوییم $\mathcal{A}$ توسط مجموعه اندیس I،

اندیس دار شده است.

در حالت کلی یک خانواده از مجموعه‌ی اندیس دار به صورت $\mathcal{A} = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ است. Γ را مجموعه اندیس می‌نامیم.

توجه کنید که لزومی ندارد مجموعه اندیس Γ از اعداد طبیعی تشکیل شده باشد، بلکه می‌تواند حتی از مجموعه‌ی اعداد مختلط نیز تشکیل گردد.

مثال: اگر برای هر $\gamma \in \mathbb{R}$ ، $A_\gamma = [\gamma, \gamma+1)$ در این صورت $\mathcal{A} = \{A_\gamma \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های اندیس دار با مجموعه اندیس $\mathbb{R}$ است.

در این مثال:

$$A_0 = [0, 1) \quad , \quad A_{-3} = [-3, -2) \quad , \quad A_{\sqrt{2}} = [\sqrt{2}, \sqrt{2}+1)$$

نمادگذاری: بعضی مواقع به جای $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ می‌نویسیم $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$.

اجتماع و اشتراک مجموعه‌ی اندیس دار

تعریف: فرض کنید $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های اندیس دار باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \mid \forall \gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

به عبارت دیگر:

$$x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \equiv \forall \gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma$$

به همین صورت

$$\bigcup A_\gamma = \{x \mid \exists \gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

به عبارت دیگر:

$$x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \equiv \exists \gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma$$

مثال. فرض کنید $A_n=[n,+\infty)$. مطلوبست:

الف) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ب. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

حل. الف) ادعا می‌کنیم $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=[1,+\infty)$،
برای این منظور فرض کنید $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. بنابراین $n\in\mathbb{N}$ موجود است که $x\in A_n$. یعنی $x\in[n,+\infty)$ و در نتیجه $n\leqslant x$، از آنجا که $1\leqslant n$ خواهیم داشت $1\leqslant x$ و لذا $x\in[1,+\infty)$، پس $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\subseteq[1,+\infty)$.
بر عکس فرض کنید $x\in[1,+\infty)$. در این صورت $x\in A_1$ و لذا $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
پس $[1,+\infty)\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. در نتیجه $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=[1,+\infty)$.

ب) ادعا می‌کنیم $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\varnothing$،
برای این منظور فرض کنید $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. در این صورت برای هر n، $x\in A_n$.
یعنی برای هر n، $x\geq n$ و این امکان پذیر نیست. پس $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\varnothing$.

قضیه. فرض کنید $\{A_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ای اندیس‌دار باشد. در این صورت

الف. $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)'=\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$ ب) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)'=\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$.

اثبات. الف)

$$\begin{aligned}
x\in\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' &\equiv \sim\left(x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)\\
&\equiv \sim\left(\forall\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\right)\\
&\equiv \exists\gamma\in\Gamma \quad x\notin A_\gamma\\
&\equiv \exists\gamma\in\Gamma \quad x\in A'_\gamma\\
&\equiv x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma
\end{aligned}$$

ب) مشابهاً ثابت می‌شود.

به همین صورت می‌توان ثابت کرد:

قضیه: فرض کنید $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها اندیس دار باشد. در این صورت

الف. $A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\right)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$

ب) $A\cup\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\right)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\cup B_\gamma)$

اثبات:

الف) فرض کنید $x\in A\cap(\bigcup B_\gamma)$. در این صورت $x\in A$, $x\in\bigcup B_\gamma$.
از این که $x\in\bigcup B_\gamma$ لذا $\gamma\in\Gamma$ موجود است که $x\in B_\gamma$، بنابراین
$x\in A\cap B_\gamma$ و لذا $x\in\bigcup(A\cap B_\gamma)$.

برعکس.

$$\left.\begin{array}{l} A\subseteq A \\ \forall\gamma\quad B_\gamma\subseteq\bigcup B_\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow A\cap B_\gamma\subseteq \underbrace{A\cap\left(\bigcup B_\gamma\right)}_{\text{ثابت}}$$

حال از این که برای هر γ، $A\cap B_\gamma\subseteq A\cap(\bigcup B_\gamma)$ لذا

$$\bigcup(A\cap B_\gamma)\subseteq A\cap\left(\bigcup B_\gamma\right)$$

درنتیجه $A\cap(\bigcup B_\gamma)=\bigcup(A\cap B_\gamma)$.

ب) به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

پارادوکس راسل:

در زیر با استفاده از پارادوکس راسل نشان می‌دهیم مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

قضیه. مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

اثبات. فرض کنید U مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها باشد و تعریف می‌کنیم

$$R = \{S \in U \mid S \notin S\}.$$

الف. چنانچه $R \in R$ آنگاه لازم است در شرط تعریف مجموعه صدق کند یعنی $R \notin R$

ب. اگر $R \notin R$ آنگاه R در شرط تعریف صدق می‌کند. یعنی $R \in R$.

و این تناقض است. بنابراین مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

رابطه و تابع.

فرض کنید a, b دو عنصر باشند. منظور از زوج مرتب (a,b)، دوتایی است که ترتیب قرار گرفتن a و b مهم است، یعنی $(a,b) \neq (b,a)$.

به عبارت دیگر $(a,b) = (c,d)$ اگر و تنها اگر $a=c$ و $b=d$.

در زوج مرتب (a,b)، a را مولفه یا مختص اول و b را مولفه یا مختص دوم می‌نامیم.

تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، ضرب دکارتی A و B عبارت است از

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

توجه کنید که $A \times B \neq B \times A$.

مثال. اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{e,f\}$ آنگاه
$$A\times B=\{(a,e),(a,f),(b,e),(b,f),(c,e),(c,f)\}$$
به راحتی می‌توان دید اگر $|A|=n$ و $|B|=m$ آنگاه $|A\times B|=nm$.

مسأله. نشان دهید برای هر مجموعه‌ی A، $A\times\emptyset=\emptyset$.

حل. فرض کنید $A\times\emptyset\neq\emptyset$. بنابراین $(a,b)\in A\times\emptyset$ موجود است. ولذا $b\in\emptyset$ که تناقض است، بنابراین $A\times\emptyset=\emptyset$.

نکته: $(x,y)\in A\times B \equiv x\in A$ و $y\in B$

مسأله. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند که $A\times B=\emptyset$. نشان دهید $A=\emptyset$ یا $B=\emptyset$.

حل. فرض کنید $A\neq\emptyset$ و $B\neq\emptyset$، پس $a\in A$ و $b\in B$ موجود است. بنابراین $(a,b)\in A\times B$ ولذا $A\times B\neq\emptyset$ که تناقض است. بنابراین $A=\emptyset$ یا $B=\emptyset$.

مسأله. فرض کنید $A\times B=B\times A$. نشان دهید $A=\emptyset$ یا $B=\emptyset$ یا $A=B$.

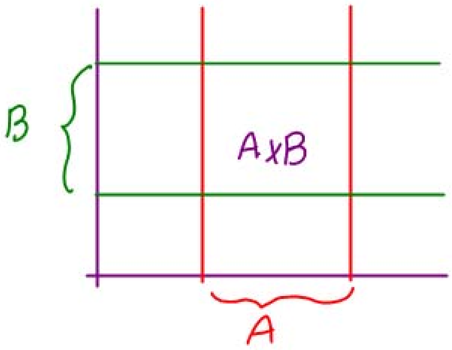
اثبات. فرض می‌کنیم $A\neq\emptyset$ و $B\neq\emptyset$ و نشان می‌دهیم $A=B$.
از این که $A\neq\emptyset$ نتیجه می‌شود $a\in A$ موجود است. مشابهاً از این که $B\neq\emptyset$ نتیجه می‌شود $b\in B$ وجود دارد.

حال فرض کنید $x \in A$ دلخواه باشد:

$$\begin{matrix} x \in A \\ b \in B \end{matrix} \Rightarrow (x,b) \in A\times B \xrightarrow{A\times B = B\times A} (x,b) \in B\times A \to \begin{cases} x \in B \\ b \in A \end{cases}$$

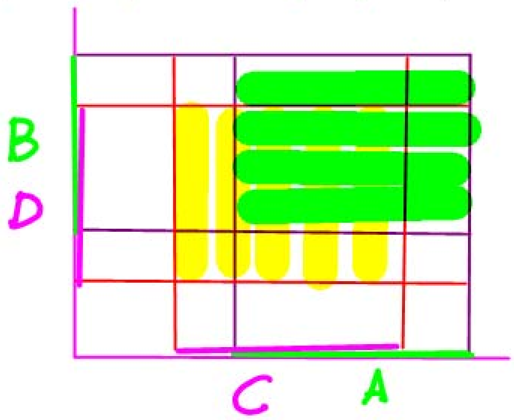
بنابراین $A \subseteq B$. مشابهاً $B \subseteq A$ و لذا $A = B$. □

شکل:



مسئله. ثابت کنید $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

حل:



$$(x,y) \in (A\times B)\cap(C\times D) \equiv (x,y)\in A\times B \;\wedge\; (x,y)\in C\times D$$

$$\equiv (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in C \wedge y \in D)$$

$$\equiv (x\in A \wedge x\in C) \wedge (y\in B \wedge y\in D)$$

$$\equiv x \in (A\cap C) \wedge y \in (B\cap D)$$

$$\equiv (x,y) \in (A\cap C)\times(B\cap D)$$

پس $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$.

توجه کنید که با قرار دادن اجتماع به جای اشتراک در رابطه‌ی بالا، رابطه‌ای لزوماً صحیح برقرار نمی‌شود. با این حال

تمرین: ثابت کنید $(A\times B)\cup(C\times D) \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D)$.

قضیه. فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند. در این صورت

الف. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

ب. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

اثبات. (ب) را ثابت می‌کنیم.

$$(x,y)\in A\times(B\cup C) \equiv x\in A \wedge y\in B\cup C$$

$$\equiv \underbrace{x\in A}_{p} \wedge (\underbrace{y\in B}_{q} \vee \underbrace{y\in C}_{r})$$

$$\equiv (x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in C)$$

$$\equiv (x,y)\in A\times B \vee (x,y)\in A\times C$$

$$\equiv (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C)$$

بنابراین $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

مسأله: ثابت کنید $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$.

حل:

$$(x,y)\in A\times(B-C)\equiv x\in A \wedge y\in B-C$$

$$\equiv \underbrace{x\in A}_{p}\wedge(\underbrace{y\in B}_{q}\wedge\underbrace{y\notin C}_{r})$$

$$\equiv (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C)$$

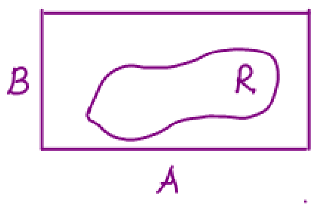
$$\equiv (x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin A\times C$$

$$\equiv (x,y)\in(A\times B)-(A\times C)$$

بنابراین $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$.

رابطه.

تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند.



یک رابطه از A به B عبارت است از $R\subseteq A\times B$.

مثال: فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5\}$.

در این صورت $A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$

اکنون

$R_1=\{(1,4)(2,5)\}$

$R_2=\{(1,5)(2,4)(2,5)(3,5)\}$

$R_3=\emptyset,\qquad R_4=A\times B,\ \ldots$

همگی رابطه‌هایی از A به B هستند.

به راحتی می‌توان دید اگر $|A|=n$ و $|B|=m$ آنگاه $|A\times B|=nm$ و از این که هر رابطه از A به B زیرمجموعه‌ای از $A\times B$ است لذا تعداد رابطه‌ها برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های $A\times B$ یعنی 2^{nm}.

تعریف. اگر R رابطه‌ای از A به B باشد آنگاه مجموعه‌ی تمام مولفه‌های اول R را دامنه‌ی R و مجموعه‌ی تمام مولفه‌های دوم R را برد R می‌نامیم و آن‌ها را به ترتیب با نمادهای $Dom(R)$ و $Im(R)$ نشان می‌دهیم. در واقع:

$$Dom(R)=\{x\in A \mid \exists y\in B \quad (x,y)\in R\}\subseteq A$$

$$Im(R)=\{y\in B \mid \exists x\in A \quad (x,y)\in R\}\subseteq B$$

توجه کنید:

① $x\in Dom(R) \equiv \exists y\in B \quad (x,y)\in R$

② $y\in Im(R) \equiv \exists x\in A \quad (x,y)\in R$

مثال. اگر $R=\{(1,2)(1,4)(2,5)(3,1)\}$ آنگاه $Dom(R)=\{1,2,3\}$ و $Im(R)=\{1,2,4,5\}$.

تعریف. فرض کنید R رابطه‌ای از A به B باشد. در این صورت وارون R عبارت است از

$$R^{-1}=\{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$$

واضح است که اگر $R\subseteq A\times B$ آنگاه $R^{-1}\subseteq B\times A$.

مثال. اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{2,5,9,10\}$ و

$$R=\{(1,2),(3,9),(2,10),(3,5)\}$$

آنگاه:

$$R^{-1}=\{(2,1),(9,3),(10,2),(5,3)\}$$

نمادگذاری. اگر R رابطه‌ای از A به B باشد آنگاه بجای $(a,b)\in R$ می‌توان نوشت aRb.

روابط هم‌ارزی و ترتیب

تعریف. فرض کنید A یک مجموعه و R رابطه‌ای روی A باشد. ($R\subseteq A\times A$) در اینصورت

الف. R را انعکاسی گوئیم هرگاه، برای هر $a\in A$، aRa.

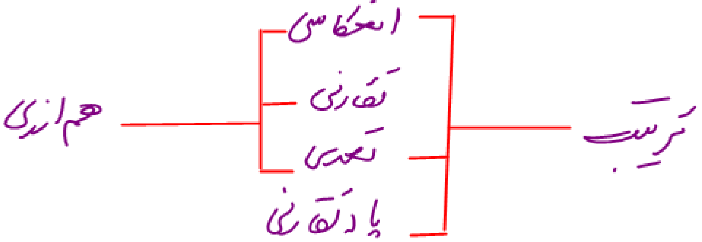
ب. R را تقارنی گوئیم هرگاه، aRb نتیجه دهد bRa.

ج. R را تعدی گوئیم هرگاه aRb و bRc نتیجه دهند aRc.

د. R را پادتقارن گوئیم هرگاه aRb و bRa نتیجه دهند $a=b$.

هـ. R را یک رابطه‌ی هم‌ارزی گوئیم هرگاه، R انعکاسی، تقارنی و تعدی باشد.

و. R را یک رابطه‌ی ترتیب گوئیم هرگاه، R انعکاسی، پادتقارنی و تعدی باشد.



مثال فرض کنید $A=\{1,2,3,4\}$ و

$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(2,3)\}$

الف. R انعکاسی نیست چون $(4,4)\notin R$.

ب. R تقارنی نیست چون $(3,4)\in R$ درحالی که $(4,3)\notin R$.

ج. R تعدی نیست چون $(1,2)\in R$، $(2,3)\in R$ درحالی که $(1,3)\notin R$.

د. R پادتقارنی نیست چون $(1,2)\in R$، $(2,1)\in R$ درحالی که $1\neq 2$.

به راحتی می‌توان دید R هم ارزی و ترتیب نیست.

مثال: رابطه‌ی موازی بودن بین تمام خطوط یک رابطه‌ی هم ارزی است چون:

الف) $\forall l \quad l \parallel l$ (انعکاسی)

ب) $l \parallel l' \longrightarrow l' \parallel l$ (تقارنی)

ج) $l \parallel l' , l' \parallel l'' \longrightarrow l \parallel l''$ (تعدی)

مثال. رابطه‌ی عمود بودن بین خطوط کدام یک از خواص هم ارزی را دارد؟

حل.

الف) $l \not\perp l \longrightarrow$ $\perp$ انعکاسی نیست

ب) $l \perp l' \longrightarrow l' \perp l$ $\perp$ تقارنی است

ج) $l \perp l' , l' \perp l'' \not\longrightarrow l \perp l''$ $\perp$ تعدی نیست

بنابراین $\perp$ هم ارزی نیست.

تعریف. گوئیم $n|a$ هرگاه $q\in\mathbb{Z}$ موجود باشد بطوری که $a=nq$.

مثال. $5|-20$ چون $-20=5(-4)$

به راحتی می‌توان ثابت کرد:

قضیه. فرض کنید a، b و n اعداد صحیح باشند در این صورت:

الف. همواره $n|0$

ب. $n|a$ آنگاه $n|-a$،

ج. اگر $n|a$ و $n|b$ آنگاه $n|a+b$.

اثبات. الف) برای هر n، $\underset{q}{n\times 0}=0$. بنابراین $n|0$.

ب) فرض کنید $n|a$. در این صورت $q\in\mathbb{Z}$ موجود است که $a=nq$.

حال $-a=n(-q)$. بنابراین $n|-a$.

ج. فرض کنید $n|a$ و $n|b$.

$$\left.\begin{array}{l} n|a \longrightarrow \exists q_1 \quad a=nq_1 \\ n|b \longrightarrow \exists q_2 \quad b=nq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=n(\underbrace{q_1+q_2}_{q'}) \longrightarrow n|a+b$$

تعریف. فرض کنید n عددی طبیعی و a و b صحیح باشند. در این صورت گوئیم a با b در پیمانه‌ی n همنهشت است هرگاه $n|a-b$. در این حالت می‌نویسیم $a\overset{n}{\equiv}b$.

مثال، $24\overset{7}{\equiv}3$ چون $7|24-3$.

قضیه. رابطه‌ی هم‌نهشتی در پیمانه‌ی n، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

اثبات. الف) رابطه‌ی $\overset{n}{\equiv}$ روی $\mathbb{Z}$ انعکاسی است، برای این منظور باید ثابت کنیم برای هر $a\in\mathbb{Z}$، $a \overset{n}{\equiv} a$. و حکم اخیر برقرار است چون $n \mid a-a=0$.

ب) رابطه‌ی $\overset{n}{\equiv}$ روی $\mathbb{Z}$ تقارنی است. زیرا:

$$a \overset{n}{\equiv} b \longrightarrow n \mid a-b \longrightarrow n \mid -(a-b)=b-a \longrightarrow b \overset{n}{\equiv} a$$

ج. رابطه‌ی $\overset{n}{\equiv}$ روی $\mathbb{Z}$ تعدی است. چون:

$$\begin{cases} a \overset{n}{\equiv} b \longrightarrow n \mid a-b \\ b \overset{n}{\equiv} c \longrightarrow n \mid b-c \end{cases} \Longrightarrow n \mid \text{جمع} = (a-b)+(b-c)=a-c$$

$$\longrightarrow a \overset{n}{\equiv} c.$$

بنابراین $\overset{n}{\equiv}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

افراز یک مجموعه

تعریف. فرض کنید A یک مجموعه باشد و $P(A)$ را مجموعه‌ی توانی A می‌گیریم. در این صورت $\mathcal{P}\subseteq P(A)$ را یک افراز A گوییم هرگاه:

الف. $\emptyset \notin \mathcal{P}$.

ب. برای هر $X,Y\in \mathcal{P}$، اگر $X\neq Y$ آنگاه $X\cap Y=\emptyset$.

ج. $\bigcup_{X\in \mathcal{P}} X = A$.

مثال. فرض کنید $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. در این صورت هر کدام از مجموعه‌های زیر افرازی از A می‌باشند،

$$P_1=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$$

$$P_2=\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7\}\}$$

$$P_3=\{\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

$\vdots$

مثال، اگر A را یک کشور در نظر بگیریم آنگاه،

$P=\{$همه‌ی استانهای کشور$\}$

افرازی از A می‌باشند،

مثال. اگر A یک دبستان باشد آنگاه:

$P=\{$کلاس اول، ...، کلاس ششم$\}$

افرازی از A می‌باشد.

رده‌های هم‌ارزی (کلاسهای هم‌ارزی)

تعریف. فرض کنید X یک مجموعه و R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X باشد. اگر $x\in X$ تعریف می‌کنیم:

$$\frac{x}{R}=\{y\in X \mid yRx\}$$

به عبارت دیگر: $y\in\frac{x}{R}$ اگر و تنها اگر yRx.

مثال. فرض کنید $X=\{1,2,3,4,5\}$ و

$$R=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$$

در این صورت:

$$1/R=\{1\},\quad 2/R=\{2,3\}=3/R,\quad 4/R=\{4,5\}=5/R$$

مثال: رابطه‌ی $\overset{3}{\equiv}$ را روی مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید و کلاس‌های هم‌ارزی آن را به دست آورید.

حل:

$$0/\overset{3}{\equiv}=\{y\in\mathbb{Z} \mid y\overset{3}{\equiv}0\}=\{\dots,-6,-3,0,3,6,9,\dots\}$$

$$1/\overset{3}{\equiv}=\{y\in\mathbb{Z} \mid y\overset{3}{\equiv}1\}=\{\dots,-5,-2,1,4,7,10,\dots\}$$

$$2/\overset{3}{\equiv}=\{y\in\mathbb{Z} \mid y\overset{3}{\equiv}2\}=\{\dots,-4,-1,2,5,8,\dots\}$$

به راحتی می‌توان دید:

$$4/\overset{3}{\equiv}=1/\overset{3}{\equiv}=7/\overset{3}{\equiv}=-2/\overset{3}{\equiv}=\dots$$

مثال. رابطه‌ی هم کلاس بودن را در دبستانی با ۶ کلاس در نظر بگیرید. این رابطه را با $\sim$ نشان می‌دهیم. در واقع

$$x\sim y \longleftrightarrow x \text{ همکلاس } y$$

الف) هر x با خودش همکلاس است. یعنی برای هر x، $x\sim x$. پس $\sim$ انعکاسی است.

ب) اگر $y\sim x$ به وضوح $x\sim y$. پس $\sim$ تقارنی است،

ج) اگر $y\sim x$ و $z\sim y$ به راحتی می‌توان دید $x\sim z$. پس $\sim$ تعدی نیز می‌باشد.

پس رابطه‌ی $\sim$ (همکلاسی) یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

احمد کلاس اول، داریوش کلاس دوم، سینا کلاس سوم، چنگیز کلاس چهارم، پدرام کلاس پنجم و همچنین دانش‌آموز کلاس ششم است.

$\{$تمام دانش آموزان کلاس اول$\} = \{ y \mid y \sim$ احمد $\} =$ احمد $/\sim$

$\vdots$

$\{$تمام دانش آموزان کلاس پنجم$\} = \{ y \mid y \sim$ پدرام $\} =$ پدرام $/\sim$

$\vdots$

به راحتی می‌توان دید اگر رضا دانش‌آموز کلاس اول باشد آنگاه احمد$/\sim$ $=$ رضا$/\sim$ ،

در حالت کلی اگر $x \sim y$ آنگاه $x/\sim \; = y/\sim$.

در مثال بالا به هر کدام از احمد، داریوش، ... و همچنین نماینده‌ی کلاس‌های رابطه‌ی همکلاسی می‌گوییم.

قضیه فرض کنید X یک مجموعه و $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X باشد. در این صورت:

الف. برای هر $x \in X$، $x/\sim \; \neq \emptyset$.

ب. $x/\sim \cap \; y/\sim \; \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر $x \sim y$.

ج. $x \sim y$ اگر و تنها اگر $x/\sim \; = y/\sim$.

اثبات. الف) از این که $x \sim x$ لذا $x \in x/\sim$. بنابراین $x/\sim \; \neq \emptyset$.

ب) ابتدا فرض کنید $x/\sim \cap \; y/\sim \; \neq \emptyset$. در این صورت $z \in x/\sim \cap \; y/\sim$ وجود دارد.

ازاین که $z \in \frac{x}{\sim}$ لذا $z \sim x$ وازاین که $\frac{x}{\sim} = \frac{y}{\sim}$ ، $z \in \frac{y}{\sim}$ بنابراین $y \sim z$ ،

حال ازاین که $\sim$ تعدی است بنابراین $y \sim x$.

اکنون فرض کنید $y \sim x$. دراین صورت $x \in \frac{y}{\sim}$.

ازطرفی طبق قسمت الف، $x \in \frac{x}{\sim}$. بنابراین $x \in \frac{x}{\sim} \cap \frac{y}{\sim}$ و

درنتیجه $\frac{x}{\sim} \cap \frac{y}{\sim} \neq \emptyset$.

ج) ابتدا فرض کنید $y \sim x$ ، می‌خواهیم نشان دهیم $\frac{y}{\sim} = \frac{x}{\sim}$ ،

برای این منظور فرض کنید $z \in \frac{x}{\sim}$. دراین صورت $x \sim z$ ، ازطرفی بنا به

فرض $y \sim x$ وبنا به خاصیت تعدی $y \sim z$. بنابراین $z \in \frac{y}{\sim}$.

پس $\frac{x}{\sim} \subseteq \frac{y}{\sim}$. مشابهاً $\frac{y}{\sim} \subseteq \frac{x}{\sim}$ ولذا $\frac{x}{\sim} = \frac{y}{\sim}$ ،

برعکس فرض کنید $\frac{y}{\sim} = \frac{x}{\sim}$. ازاین که $x \in \frac{x}{\sim}$ بنابراین $x \in \frac{y}{\sim}$ و

درنتیجه $y \sim x$ ،

تعریف. فرض کنید X یک مجموعه و $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X باشد دراین صورت

تعریف می‌کنیم:
$$\frac{X}{\sim} = \left\{ \frac{x}{\sim} \;\middle|\; x \in X \right\}$$

مثال فرض کنید X مجموعه‌ی تمام دانش آموزان در مثال قبل باشد. دراین صورت

$$\frac{X}{\sim} = \left\{ \frac{\text{احمد}}{\sim}, \frac{\text{داریوش}}{\sim}, \dots, \frac{\text{شاهین}}{\sim} \right\} = \left\{ \text{کلاس اول}, \text{کلاس دوم}, \dots, \text{کلاس ششم} \right\}$$

قضیه. فرض کنید ~ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X باشد. در این صورت $X/\sim$ افرازی از X است.

اثبات. بنا به تعریف: $X/\sim = \{ x/\sim \mid x \in X \}$

الف) برای هر $x \in X$، $x/\sim \neq \varnothing$.

ب) باید نشان دهیم هر دو کلاس متمایز، دارای اشتراک تهی هستند.

برای این منظور فرض کنید $x/\sim \neq y/\sim$ در این صورت بنا به (ج) قضیه‌ی قبل $x \not\sim y$ و با استفاده از قسمت (ب) قضیه قبل $\varnothing = x/\sim \cap y/\sim$.

ج) باید ثابت کنیم $\bigcup_{x \in X} x/\sim = X$.

برای این منظور:

$$\forall x \quad x/\sim \subseteq X \rightarrow \bigcup_{x \in X} x/\sim \subseteq X$$

برعکس اگر $x \in X$ آنگاه بوضوح $x \in x/\sim$ و لذا $x \in \bigcup_{x \in X} x/\sim$. پس $X \subseteq \bigcup x/\sim$ و درنتیجه $\bigcup_{x \in X} x/\sim = X$.

پس $X/\sim$ افرازی از X است.

- تاکنون به هر رابطه‌ی هم ارزی یک افراز متناظر کردیم. اکنون می‌خواهیم به هر افراز، زیر یک رابطه‌ی هم ارزی متناظر کنیم.

این کار را با یک مثال شروع می‌کنیم.

مثال. فرض کنید $X=\{1,2,3,4,5\}$ و $P=\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$.

به راحتی می‌توان دید P افرازی از X است،

اکنون رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

گوییم aRb (یا $(a,b)\in R$) هرگاه a و b هر دو در یک مجموعه از افراز P قرار داشته باشند، بنابراین

$$R=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$$

در حالت کلی تعریف می‌کنیم:

تعریف. فرض کنید X یک مجموعه و P افرازی از X باشد. در این صورت رابطه‌ی $\frac{X}{P}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$a(\frac{X}{P})b$ هرگاه a و b هر دو در یک مجموعه از افراز P قرار داشته باشند.

به عبارت دیگر:

$$a\left(\frac{X}{P}\right)b \leftrightarrow \exists A\in P \quad a,b\in A$$

مثال. فرض کنید $X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ و $P=\{\underbrace{\{1,2\}}_{A},\underbrace{\{3\}}_{B},\underbrace{\{4,5,6,7\}}_{C}\}$

در این صورت:

$1,1\in A \longrightarrow (1,1)\in \frac{X}{P}$

$1,2\in A \longrightarrow (1,2)\in \frac{X}{P}$ و $(2,1)\in \frac{X}{P}$

$2,2 \in A \longrightarrow (2,2) \in X/P$

$3,3 \in B \longrightarrow (3,3) \in X/P$

$4,4 \in C \longrightarrow (4,4) \in X/P$

$4,5 \in C \longrightarrow (4,5) \in X/P \;,\; (5,4) \in X/P$

$\vdots$

بنابراین

$$X/P = \{ \underbrace{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}_{A\times A},\ \underbrace{(3,3)}_{B\times B},\ \underbrace{(4,4),(4,5),(4,6),(4,7),(5,4),(5,5),(5,6),(5,7),(6,4),(6,5),(6,6),(6,7),(7,4),(7,5),(7,6),(7,7)}_{C\times C} \}$$

در واقع:
$$X/P = (A\times A)\cup(B\times B)\cup(C\times C)$$

در حالت کلی:

$$P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \longrightarrow X/P = (A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\dots\cup(A_n\times A_n)$$

قضیه. فرض کنید X یک مجموعه و P افرازی از آن باشد، در این صورت X/P یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X است.

اثبات. یادآوری می‌کنیم که:

$$a\,(X/P)\,b \longleftrightarrow \exists A \in X/P \quad a,b \in A$$

:

$$a(X/P)b \longleftrightarrow \exists A\in X/P \quad a,b\in A$$

الف) $\frac{X}{P}$ انعکاسی است.

فرض کنید $a\in X$ دلخواه باشد، می‌خواهیم نشان دهیم $(a,a)\in \frac{X}{P}$،

از این که P یک افراز است لذا $A\in P$ موجود است که $a\in A$، در واقع $a,a\in A$. پس $a(\frac{X}{P})a$.

ب) $\frac{X}{P}$ تقارنی است.

فرض کنید $a(\frac{X}{P})b$، بنابراین $A\in P$ موجود است که $a,b\in A$،

به عبارت دیگر $A\in P$ موجود است که $b,a\in A$. بنابراین $b(\frac{X}{P})a$.

پس $\frac{X}{P}$ یک رابطه متقارن است.

ج) $\frac{X}{P}$ متعدی است.

فرض کنید $a(\frac{X}{P})b$ و $b(\frac{X}{P})c$.

بنابراین $A\in P$ موجود است که $a,b\in A$. مشابهاً $B\in P$ موجود است که $b,c\in B$،

حال از این که $b\in A$ و $b\in B$ نتیجه می‌شود $b\in A\cap B$ و لذا $A\cap B\neq\emptyset$. اما

A و B مجموعه‌های یک افراز هستند. بنابراین $A=B$، پس $a,c\in A(=B)$

و لذا $a(\frac{X}{P})c$. یعنی $\frac{X}{P}$ متعدی است.

در نتیجه $\frac{X}{P}$ یک رابطه هم‌ارزی است.

چند مسأله.

مسأله ۱. رابطه‌ی R را روی $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(a,b)R(c,d) \longleftrightarrow ad=bc$$

نشان دهید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ است.

حل. الف) R انعکاسی است. برای این منظور باید نشان دهیم برای هر $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$، $(a,b)R(a,b)$. آن از این که $ab=ba$ رابطه‌ی انعکاسی برقرار است. به طور خلاصه:

$$ab=ba \longrightarrow (a,b)R(a,b)$$

ب) R تقارنی است.

$$(a,b)R(c,d) \longrightarrow ad=bc \longrightarrow cb=da \longrightarrow (c,d)R(a,b)$$

ج) R متعدی است.

$$(a,b)R(c,d) \longrightarrow ad=bc \xrightarrow{\times f} adf=bcf$$
$$(c,d)R(e,f) \longrightarrow cf=de \xrightarrow{\times b} bcf=bde$$

$$\longrightarrow a\cancel{d}f=b\cancel{d}e \longrightarrow af=be \longrightarrow (a,b)R(e,f)$$

بنابراین R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.
اکنون می‌خواهیم کلاس هم‌ارزی $(4,6)/_R$ را محاسبه کنیم.

بنا به تعریف:

$$\frac{(4,6)}{R}=\{(x,y)\mid (x,y)R(4,6)\}$$

$$=\{(x,y)\mid 6y=4x\}=\{(x,y)\in \mathbb{Z}\times \mathbb{Z}-\{0\}\mid 3y=2x\}$$

تعدادی از عناصر کلاس هم ارزی $\frac{(4,6)}{R}$ را می‌نویسیم،

$$\frac{(4,6)}{R}=\{(3,2),(-3,-2),(6,4),(-6,-4),(9,6),(-9,-6),\dots\}$$

با نگاهی به رابطه‌ی تعریف شده داریم

$$(a,b)R(c,d)\longleftrightarrow ad=bc$$

بنابراین می‌توان فرض کرد زوج مرتب (a,b) همان کسر $\frac{a}{b}$ است. با این توصیف

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\longleftrightarrow ad=bc$$

پس از همان ابتدا می‌توانستیم رابطه‌مان را به صورت زیر تعریف کنیم،

$$(a,b)R(c,d)\longleftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

که البته $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in \mathbb{Q}$، در این صورت به راحتی می‌توان نشان داد رابطه‌ی R یک رابطه هم ارزی است،

الف. R انعکاسی است.

$$\forall a,b\quad \frac{a}{b}=\frac{a}{b}\rightarrow (a,b)R(a,b)$$

ب. R تقارنی است.

$$(a,b)R(c,d)\longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\longrightarrow \frac{c}{d}=\frac{a}{b}\longrightarrow (c,d)R(a,b)$$

ج) R تعدی است.

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\,R\,(c,d) \longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ (c,d)\,R\,(e,f) \longrightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \longrightarrow (a,b)\,R\,(e,f).$$

توجه کنید در این روش برای اثبات هم ارزی بودن R، رابطه‌ی R را ترجمه کرده و با استفاده از آن هم ارزی بودن را ثابت کرده‌ایم.

$$[(4,6)]_R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\} \mid (x,y)\,R\,(4,6)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\} \mid \frac{x}{y} = \frac{4}{6}\}$$

و چون $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{-2}{-3} = \frac{6}{9} = \frac{-6}{-9} = \cdots$

لذا می‌توان کلاس هم ارزی را به راحتی بدست آورد.

مسأله ۲. رابطه‌ی $\sim$ را روی $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(a,b) \sim (c,d) \longleftrightarrow bd \mid ad-bc.$$

ابتدا نشان دهید $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$ است و سپس کلاس هم ارزی $(3,4)$ و $(0,2)$ را بدست آورید.

حل. به روش مستقیم می‌توان هم ارزی بودن را ثابت کرد.

اما ما ابتدا سعی می‌کنیم رابطه‌ی $\sim$ را ترجمه کنیم.

$bd \mid ad-bc$ بدین معنی است که کسر $\frac{ad-bc}{bd}$ مقداری صحیح است.

اما $\frac{ad-bc}{bd} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$. پس

$$(a,b) \sim (c,d) \longleftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}$$

اکنون نشان می‌دهیم $\sim$ هم ارزی است.

الف. ~ انعکاسی است.

$$\frac{a}{b}-\frac{a}{b}=0\in\mathbb{Z} \longrightarrow (a,b)\sim(a,b)$$

ب) ~ تقارنی است.

$$(a,b)\sim(c,d)\longrightarrow \frac{a}{b}-\frac{c}{d}\in\mathbb{Z}\longrightarrow \frac{c}{d}-\frac{a}{b}\in\mathbb{Z}$$

$$\longrightarrow (c,d)\sim(a,b)$$

ج) ~ متعدی است.

$$(a,b)\sim(c,d)\longrightarrow \frac{a}{b}-\cancel{\frac{c}{d}}\in\mathbb{Z}$$

$$(c,d)\sim(e,f)\longrightarrow \cancel{\frac{c}{d}}-\frac{e}{f}\in\mathbb{Z}$$

ج: $\frac{a}{b}-\frac{e}{f}\in\mathbb{Z}\longrightarrow (a,b)\sim(e,f)$

اکنون کلاس هم ارزی $(3,4)$ را بدست می‌آوریم.

$$(3,4)/_{\sim}=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}\ \middle|\ \frac{x}{y}-\frac{3}{4}\in\mathbb{Z}\right\}$$

بنابراین باید $\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$ را چنان بیابیم که $\frac{x}{y}-\frac{3}{4}\in\mathbb{Z}$، به عبارت دیگر

$\frac{x}{y}-\frac{3}{4}=0$ یا 1 یا -1 یا 2 یا -2 یا ...

$\longrightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ یا $\frac{3}{4}+1$ یا $\frac{3}{4}-1$ یا ....

$\longrightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ یا $\frac{7}{4}$ یا $\frac{-1}{4}$ یا $\frac{11}{4}$ یا $-\frac{5}{4}$ یا ...

بنابراین:

$$(3,4)/_{\sim}=\{(3,4),(7,4),(-5,4),(11,4),\dots\}$$

تمرین ۱. مثال قبل را مستقیماً حل کنید و کلاس‌های هم‌ارزی $(3,4)$ و $(2,0)$ را بدست آورید.

تمرین ۲. روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ رابطه‌ی $\sim$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(a,b)\sim(c,d) \longleftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$$

ابتدا نشان دهید $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ است و سپس کلاس هم‌ارزی $(3,4)$ و $(0,0)$ را به دست آورید.

تمرین ۳. روی $(\mathbb{R}-\{0\})^3$ تعریف می‌کنیم:

$$(a,b,c)\sim(a',b',c') \longleftrightarrow \begin{cases} ab'=ba' \\ ac'=ca' \\ bc'=cb' \end{cases}$$

ابتدا نشان دهید رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی است و سپس کلاس هم ارزی $(1,-2,3)$ را به دست آورید.

تابع

تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. f را یک تابع از A به B گوییم هرگاه f رابطه‌ای از A به B باشد، بعلاوه:

الف. $Dom f = A$

ب. اگر $(x,y_1),(x,y_2)\in f$ آنگاه $y_1=y_2$،

توجه کنید خاصیت (ب) در واقع بیان می‌کند که زوج‌هایی مرتب با مؤلفه‌ی اول یکسان در f موجود نمی‌باشند.

در چنین حالتی می‌نویسیم $f:A\to B$.

مثال. فرض کنید $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A=\{1,2,3,4,5\}$ ،

① $f=\{(1,1)(2,3)(3,5)(4,5)\}$ یک تابع از A به B نیست. چون

$Dom f=\{1,2,3,4\}\neq A$ ،

② $g=\{(1,1),(2,2),(3,4),(4,7),(5,7)\}$ یک تابع از A به B است

چون اولاً: $Dom\ g = A$ و ثانیاً مؤلفه‌ی اول تکراری در g موجود نیست.

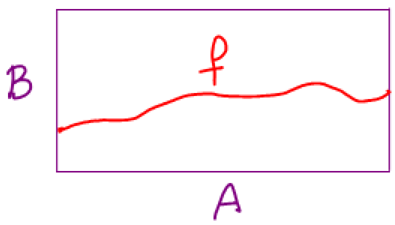
③ $h=\{(1,2)(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)\}$ یک تابع از A به B نیست

چون h اصلاً یک رابطه از A به B نیست. توجه کنید $h\not\subseteq A\times B$.

④ $R=\{(1,1)(1,2),(2,3),(3,2),(4,1),(5,2)\}$ یک تابع از A به B نیست

چون در زوج‌های مرتب $(1,1)$ و $(1,2)$ مولفه‌ی اول تکرار شده است.

در زیر شکل یک تابع از A به B نشان داده شده است



نمادگذاری. فرض کنید $f:A\to B$ یک تابع باشد و $(a,b)\in f$ ، در این صورت

می‌نویسیم $b=f(a)$ ،

به عبارت دیگر:

$$(a,b)\in f \longleftrightarrow b=f(a)$$

قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ و $g: X \to Y$ دو تابع باشند. در این صورت $f = g$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $f(x) = g(x)$.

اثبات. ابتدا فرض کنید $f = g$. اکنون برای هر x اگر $y = f(x)$ آنگاه،

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\equiv (x, y) \in f \\
&\equiv (x, y) \in g \\
&\equiv y = g(x)
\end{aligned}
$$

پس $f(x) = g(x)$.

برعکس فرض کنید $f(x) = g(x)$، $\forall x$. در این صورت:

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in f &\equiv y = f(x) \\
&\equiv y = g(x) \\
&\equiv (x, y) \in g
\end{aligned}
$$

بنابراین $f = g$.

قضیه. فرض کنید $f: A \to C$ و $g: B \to D$ دو تابع باشند به طوری که برای هر $x \in A \cap B$، $f(x) = g(x)$. در این صورت $h = f \cup g : A \cup B \to C \cup D$ یک تابع است که در آن برای هر x،

$$
h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}
$$

اثبات. ابتدا باید نشان دهیم $h = f\cup g$ یک رابطه از $A\cup B$ به $C\cup D$ است،

$f: A\to C$ یک تابع و لذا یک رابطه است، پس $f\subseteq A\times C$

$g: B\to D$ نیز یک تابع و در نتیجه یک رابطه است، بنابراین $g\subseteq B\times D$.

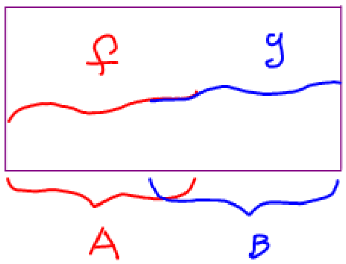
پس:

$$h = f\cup g \subseteq (A\times C)\cup(B\times D) \subseteq (A\cup B)\times(C\cup D)$$

و در نتیجه h یک رابطه از $A\cup B$ به $C\cup D$ است، به علاوه:

الف. $\mathrm{Dom}\, h = A\cup B$. چون:

$$\mathrm{Dom}\, h = \mathrm{Dom}(f\cup g) = \mathrm{Dom}\, f \cup \mathrm{Dom}\, g = A\cup B$$



ب. فرض کنید $(x,y_1),(x,y_2)\in h = f\cup g$. در این صورت سه حالت ممکن است رخ دهد.

حالت اول. $(x,y_1), (x,y_2)\in f$. در این صورت از تابع بودن f نتیجه می‌شود $y_1=y_2$،

حالت دوم، $(x,y_1),(x,y_2)\in g$. در این صورت از تابع بودن g خواهیم داشت $y_1=y_2$.

حالت سوم. $(x, y_1) \in f$ و $(x, y_2) \in g$.

از این که $(x, y_1) \in f$ لذا $x \in Dom f = A$

و از این که $(x, y_2) \in g$ لذا $x \in Dom g = B$

بنابراین $x \in A \cap B$. در این صورت $f(x) = g(x)$. اکنون

$$y_1 = f(x) = g(x) = y_2$$

بنابراین $y_1 = y_2$ و لذا $h = f \cup g : A \cup B \to C \cup D$.

نگاره و نگاره وارون

تعریف. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد. برای هر $A \subseteq X$ تعریف می‌کنیم:

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subseteq Y$$

به عبارت دیگر: $y \in f(A) \equiv \exists x \in A \quad y = f(x)$

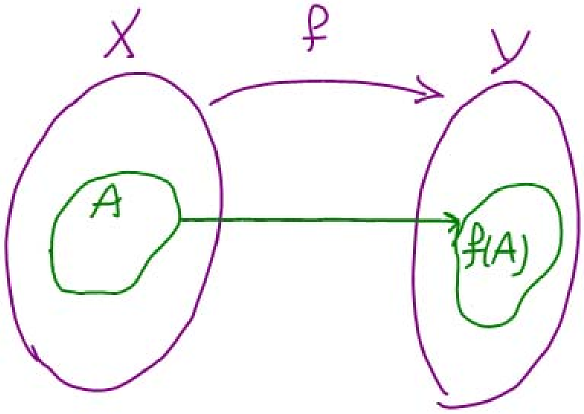
$f(A)$ را نگاره‌ی مجموعه‌ی A می‌نامیم،

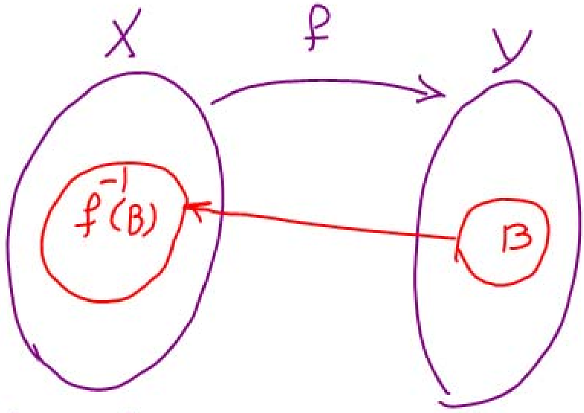
تعریف. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع بوده و $B \subseteq Y$. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subseteq X$$

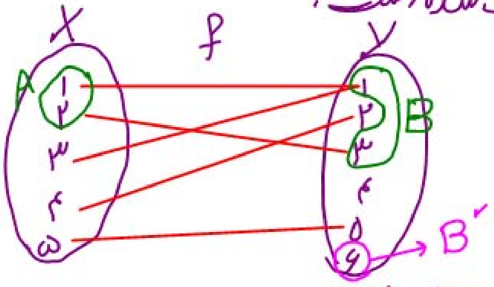
به عبارت دیگر: $x \in f^{-1}(B) \equiv f(x) \in B$

$f^{-1}(B)$ را نگاره وارون مجموعه‌ی B می‌نامیم.





مثال. فرض کنید $X=\{1,2,3,4,5\}$ و $Y=\{1,2,3,4,5,6\}$. تابع $f:X\to Y$ به صورت زیر تعریف شده است.



اکنون اگر $A=\{1,2\}\subseteq X$ آنگاه:

$$f(A)=\{f(1),f(2)\}=\{1,3\}$$

و اگر $B=\{1,3\}\subseteq Y$. در این صورت:

$$f^{-1}(B)=\{1,2,3\}$$

و اگر $B'=\{6\}$ آنگاه $f^{-1}(B')=\emptyset$.

قضیه. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد. دراین صورت:

الف. $f(\emptyset)=\emptyset$،

ب. $A\subseteq B\subseteq X$ آنگاه $f(A)\subseteq f(B)$.

ج. $C\subseteq D\subseteq Y$ آنگاه $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$،

اثبات. الف)

$$f(\emptyset)=\{f(x)\mid x\in\emptyset\}=\emptyset$$

ب) فرض کنید $y\in f(A)$.

$$y\in f(A)\longrightarrow \exists x\in A\quad y=f(x)$$

$$\xrightarrow{A\subseteq B}\exists x\in B\quad y=f(x)\longrightarrow y\in f(B)$$

بنابراین $f(A)\subseteq f(B)$،

ج) فرض کنید $C\subseteq D$، می‌خواهیم ثابت کنیم $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$.

$$x\in f^{-1}(C)\longrightarrow f(x)\in C\xrightarrow{C\subseteq D}f(x)\in D\to x\in f^{-1}(D)$$

بنابراین $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$.

قضیه. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع بوده و $\{A_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. دراین صورت:

$$f(\cup A_\gamma)=\cup f(A_\gamma)$$

اثبات. قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ ، در این صورت برای هر γ ، $A_\gamma \subseteq A$
ودرنتیجه $f(A_\gamma) \subseteq f(A)$ ودرنتیجه $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \subseteq f(A)$. یعنی

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \subseteq f\Big(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\Big)$$

برعکس، فرض کنید $y \in f(\bigcup A_\gamma)$. در این صورت $x \in \bigcup A_\gamma$ موجود است
که $y = f(x)$ ، بنابراین $\gamma \in \Gamma$ موجود است که $x \in A_\gamma$ ولذا
$y = f(x) \in f(A_\gamma)$. پس $y \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$ ، بنابراین:

$$f\Big(\bigcup A_\gamma\Big) \subseteq \bigcup f(A_\gamma)$$

ودرنتیجه $f(\bigcup A_\gamma) = \bigcup f(A_\gamma)$.

قضیه. فرض کنید $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع و $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از
زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت

$$f\Big(\bigcap A_\gamma\Big) \subseteq \bigcap f(A_\gamma)$$

اثبات. قرار میدهیم $A = \bigcap A_\gamma$. در این صورت:

$$\forall \gamma \quad A \subseteq A_\gamma \longrightarrow \forall \gamma \quad f(A) \subseteq f(A_\gamma)$$

$$\longrightarrow f(A) \subseteq \bigcap f(A_\gamma)$$

پس $f(\bigcap A_\gamma) \subseteq \bigcap f(A_\gamma)$ وحکم ثابت می‌شود.

قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع بوده و $\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y باشند. در این صورت:

$$f^{-1}(\bigcup B_\gamma) = \bigcup f^{-1}(B_\gamma)$$

اثبات. قرار می‌دهیم $B = \bigcup B_\gamma$. در این صورت

$$\forall \gamma \quad B_\gamma \subseteq B \longrightarrow \forall \gamma \quad f^{-1}(B_\gamma) \subseteq f^{-1}(B)$$

$$\longrightarrow \bigcup f^{-1}(B_\gamma) \subseteq f^{-1}(B)$$

پس $\bigcup f^{-1}(B_\gamma) \subseteq f^{-1}(\bigcup B_\gamma)$.

برعکس، فرض کنید $x \in f^{-1}(\bigcup B_\gamma)$. در این صورت $f(x) \in \bigcup B_\gamma$ و لذا $\gamma \in \Gamma$ موجود است که $f(x) \in B_\gamma$ و در نتیجه $x \in f^{-1}(B_\gamma)$.

پس $x \in \bigcup f^{-1}(B_\gamma)$.

بنابراین $f^{-1}(\bigcup B_\gamma) \subseteq \bigcup f^{-1}(B_\gamma)$ و حکم ثابت می‌شود.

قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع بوده و $\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y باشند. در این صورت:

$$f^{-1}(\bigcap B_\gamma) = \bigcap f^{-1}(B_\gamma)$$

اثبات. فرض می‌کنیم $B=\bigcap B_\gamma$. در این صورت،

$$\forall \gamma \quad B \subseteq B_\gamma \longrightarrow \forall \gamma \quad f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B_\gamma)$$

$$\longrightarrow f^{-1}(B) \subseteq \bigcap f^{-1}(B_\gamma)$$

پس $f^{-1}(\bigcap B_\gamma) \subseteq \bigcap f^{-1}(B_\gamma)$.

برعکس، فرض کنید $x \in \bigcap f^{-1}(B_\gamma)$. در این صورت برای هر γ ، $x \in f^{-1}(B_\gamma)$ و لذا $f(x) \in B_\gamma$. حال چون γ دلخواه است بنابراین $f(x) \in \bigcap B_\gamma$ و در نتیجه $x \in f^{-1}(\bigcap B_\gamma)$. بنابراین $\bigcap f^{-1}(B_\gamma) \subseteq f^{-1}(\bigcap B_\gamma)$ و حکم ثابت می‌شود.

قضیه. فرض کنید $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع بوده و $B, C \subseteq Y$. در این صورت

$$f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C).$$

اثبات.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B-C) &\equiv f(x) \in B - C \\ &\equiv f(x) \in B \text{ و } f(x) \notin C \\ &\equiv x \in f^{-1}(B) \text{ و } x \notin f^{-1}(C) \\ &\equiv x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(C) \end{aligned}$$

بنابراین $f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$.

توابع یک به یک، پوشا و دوسوئی

تعریف: فرض کنید $f: A \to B$ یک تابع باشد. در این صورت f را یک به یک گفته می‌شود هرگاه

$$(x_1, y), (x_2, y) \in f \longrightarrow x_1 = x_2$$

به عبارت دیگر f یک به یک است هرگاه در عناصر f، مولفه‌ی دوم تکراری وجود نداشته باشد.

محکی برای تشخیص یک به یک بودن

چنانچه $f: A \to B$ یک تابع باشد آنگاه f یک به یک است هرگاه

$$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$$

مثال: آیا تابع $\begin{cases} f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ f(x) = 2x - 1 \end{cases}$ یک به یک است؟

جواب: $f(a) = f(b) \longrightarrow 2a - 1 = 2b - 1 \longrightarrow a = b$

بنابراین f یک به یک است.

مثال: تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$ یک به یک نیست چون:

$$\left.\begin{matrix} f(0) = 3 \\ f(2) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(0) = f(2)$$

درحالیکه $0 \neq 2$. پس f یک به یک نیست.

مثال. آیا تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x)=x^3+3x-2 \end{cases}$ یک به یک است؟

جواب. نشان می‌دهیم f یک به یک است.

روش اول. $f(a)=f(b) \to a^3+3a-2=b^3+3b-2$

$$\to a^3+3a=b^3+3b$$

$$\to \underbrace{a^3-b^3}+3a-3b=0$$

$$\to (a-b)(a^2+ab+b^2)+3(a-b)=0$$

$$\to (a-b)(\underbrace{a^2+ab+b^2+3}_{\neq 0})=0$$

$$\to a-b=0 \to a=b \to$$ f یک به یک

توجه کنید: $a^3+3a=b^3+3b \to a(\underbrace{a^2+3}_{>0})=b(\underbrace{b^2+3}_{>0})$

بنابراین a و b هم علامت بوده و لذا $ab \geq 0$. پس $a^2+ab+b^2+3>0$.

روش دوم. $f(x)=x^3+3x-2 \to f'(x)=3x^2+3>0$

پس f اکیداً صعودی و لذا یک به یک است.

مثال. نشان دهید تابع $\begin{cases} f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ f(x,y)=2^{x-1}(2y-1) \end{cases}$ یک به یک است.

حل. $f(a,b)=f(c,d) \to 2^{a-1}(2b-1) \underset{*}{=} 2^{c-1}(2d-1)$

$$\longrightarrow \frac{2^{a-1}}{2^{c-1}}(2b-1) = 2d-1 \longrightarrow 2^{a-c}(2b-1)=2d-1$$

از این که سمت راست تساوی اخیر فرد است لذا $2^{a-c}(2b-1)$ نیز

باید فرد باشد و درنتیجه $a-c=0$. پس $a=c$.

$$* \longrightarrow \cancel{2^{a-1}}(2b-1)=\cancel{2^{c-1}}(2d-1) \xrightarrow{a=c} 2b-1=2d-1 \rightarrow b=d$$

پس $(a,b)=(c,d)$ و لذا f یک به یک است.

قضیه. فرض کنید $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع یک به یک بوده و $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$

خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. دراین صورت

$$f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

اثبات. قبلاً و بدون استفاده از فرض یک به یک بودن ثابت کردیم

$f(\cap A_\gamma) \subseteq \cap f(A_\gamma)$. اکنون ثابت می‌کنیم $\cap f(A_\gamma) \subseteq f(\cap A_\gamma)$.

برای این منظور فرض کنید $y \in \cap f(A_\gamma)$ دلخواه باشد. دراین صورت برای

هر γ، $y \in f(A_\gamma)$. بنابراین $x_\gamma \in A_\gamma$ موجود است که $y=f(x_\gamma)$.

نشان می‌دهیم همه x_γ ها باهم برابرند. زیرا اگر γ_1 و γ_2 را در نظر بگیریم

$y=f(x_{\gamma_1})$ و $y=f(x_{\gamma_2})$. بنابراین $f(x_{\gamma_1}) = f(x_{\gamma_2})$ و چون f

یک به یک است لذا $x_{\gamma_1}=x_{\gamma_2}$. این بدین معنی است که همه x_γ ها باهم

برابرند. همه x_γ ها را x می‌نامیم.

اکنون:

$$\forall \gamma \quad x = x_\gamma \in A_\gamma \longrightarrow x \in \bigcap A_\gamma$$

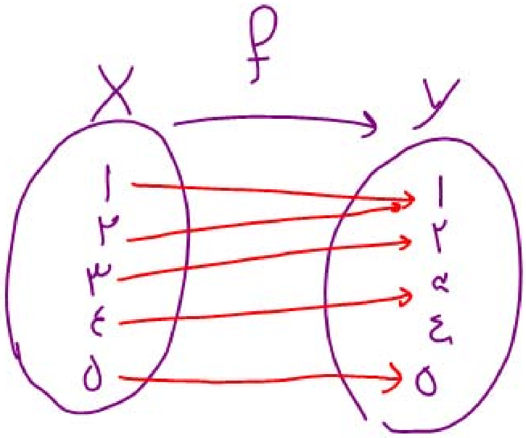
$$\longrightarrow y = f(x) \in f\left(\bigcap A_\gamma\right)$$

بنابراین $\bigcap f(A_\gamma) \subseteq f\left(\bigcap A_\gamma\right)$ و حکم ثابت می‌شود.

تعریف: تابع $f: X \longrightarrow Y$ پوشا نامیده می‌شود هرگاه $f(X) = Y$.

یعنی $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = Y$

مثال:



$$f(X) = \{1, 2, 3, 5\} \neq Y$$

بنابراین f پوشا نیست.

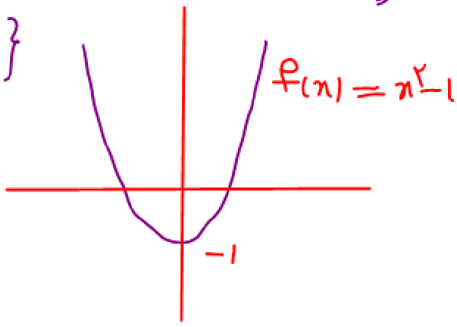
توجه کنید اگر $f: X \longrightarrow Y$ پوشا باشد آنگاه

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad y = f(x)$$

مثال: آیا تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2-1 \end{cases}$ پوشاست؟

جواب: خیر، چون

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x\in\mathbb{R}\} = \{x^2-1 \mid x\in\mathbb{R}\} = [-1,+\infty) \neq \mathbb{R}$$



مثال: آیا تابع $\begin{cases} f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ f(x,y)=2^{x-1}(2y-1) \end{cases}$ پوشاست؟

جواب: نشان می‌دهیم f پوشاست. برای این منظور فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ دلخواه باشد، در این صورت n قابل نمایش به صورت $2^k\cdot t$ است که $k\geq 0$ و t عددی فرد است. قرار می‌دهیم $k=x-1$. در این صورت $x\geq 1$.

همچنین t عددی فرد است، پس قرار می‌دهیم $t=2y-1$، در این صورت

$$n=2^k t = 2^{x-1}(2y-1)=f(x,y)$$

و در نتیجه f پوشاست.

تعریف: تابع $f:X\to Y$ دوسوئی نامیده می‌شود هرگاه هم یک به یک و هم پوشا باشد.

مثال: تابع $\begin{cases} f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ f(x,y)=2^{x-1}(2y-1) \end{cases}$ هم یک به یک و هم پوشاست. بنابراین دوسوئی است.

فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد. در این صورت f رابطه‌ای از X به Y است.
بنابراین f^{-1} رابطه‌ای از Y به X است. سوالی که هم اکنون مطرح است این است که
آیا $f^{-1}: Y \to X$ یک تابع است؟ تحت چه شرائطی این اتفاق می‌افتد؟

قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ تابعی دوسوئی باشد. در این صورت $f^{-1}: Y \to X$
نیز تابعی دوسوئی است.

اثبات. $f: X \to Y$ یک تابع است، بنابراین $f \subseteq X \times Y$ و لذا $f^{-1} \subseteq Y \times X$
پس f^{-1} رابطه‌ای از Y به X است. به علاوه،

① از این که $f: X \to Y$ پوشاست لذا

$$\operatorname{Im} f = f(X) = Y$$

بنابراین:

$$\operatorname{Dom}(f^{-1}) = \operatorname{Im} f = Y$$

② فرض کنید $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$ دلخواه باشند. در این صورت:
$(x_1, y) \in f$ و (x_2, y). چون f یک به یک است بنابراین $x_1 = x_2$.
پس شرط دوم تابع بودن $f^{-1}: Y \to X$ نیز برقرار است.

تاکنون نشان داده‌ایم $f^{-1}: Y \to X$ یک تابع است. حال می‌خواهیم نشان دهیم
f^{-1} دوسوئی (یک به یک و پوشا) است.

۳) $X \to Y: f^{-1}$ یک به یک است، برای این منظور فرض کنید

$(y_1, x), (y_2, x) \in f^{-1}$. در این صورت $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ و از این

که f تابع است لذا $y_1 = y_2$. پس f^{-1} یک به یک است،

۴) $f^{-1}: Y \to X$ پوشاست، برای این منظور باید نشان دهیم $\operatorname{Im} f^{-1} = X$

اما از این که $f: X \to Y$ یک تابع است لذا $\operatorname{Dom} f = X$. پس

$$\operatorname{Im} f^{-1} = \operatorname{Dom} f = X.$$

پس $f^{-1}: Y \to X$ پوشا و در نتیجه دوسوئی است.

تعریف. تابع $f: X \to Y$ را وارون پذیر گوئیم هرگاه $f^{-1}: Y \to X$ یک تابع باشد،

بنا به قضیه قبل، تابع f وارون پذیر است هرگاه دوسوئی باشد.

ترکیب توابع.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$x \rightsquigarrow f(x) \rightsquigarrow g(f(x))$$

تعریف. فرض کنید $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دو تابع باشند. در این صورت

$g \circ f: X \to Z$ تابعی است که برای هر $x \in X$، $g \circ f(x) = g(f(x))$.

قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$، $g: Y \to Z$ و $h: Z \to W$ سه تابع

باشند. در این صورت:

دراین صورت $g\circ f: X\to Z$ و $h\circ g: Y\to W$. به علاوه

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f).$$

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}W$$

$$X\xrightarrow{g\circ f}Z\xrightarrow{h}W$$

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{h\circ g}W$$

تعریف. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد. دراین صورت:

الف. $g:Y\to X$ را وارون چپ f گوئیم هرگاه $g\circ f=I_X$.

ب. $h:Y\to X$ را وارون راست f گوئیم هرگاه $f\circ h=I_Y$.

توجه: به راحتی می‌توان دید اگر $f:X\to Y$ و $g:Y\to X$ آنگاه $g\circ f: X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}X$، همچنین $I_X:X\to X$ را تابع همانی می‌گیریم. در واقع برای هر $x\in X$، $I_X(x)=x$.

و چنانچه $h:Y\to X$ آنگاه $f\circ h: Y\xrightarrow{h}X\xrightarrow{f}Y$.

قضیه. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد.

الف. اگر f دارای وارون چپ باشد، آنگاه f یک به یک است.

ب. اگر f دارای وارون راست باشد آنگاه f پوشاست.

اثبات.

الف) فرض کنید $f: X \to Y$ دارای وارون چپ $g: Y \to X$ باشد. در این صورت $g \circ f: X \to X$ همانی است. یعنی برای هر x، $g \circ f(x) = x$.

برای این که ثابت کنیم f یک به یک است فرض می‌کنیم $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{g\circ} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \longrightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین f یک به یک است.

ب) فرض کنید $f: X \to Y$ دارای وارون راست $h: Y \to X$ باشد.

در این صورت $f \circ h: Y \to Y$ همانی است. یعنی برای هر y، $f \circ h(y) = y$.

می‌خواهیم ثابت کنیم $f: X \to Y$ پوشاست. برای این منظور فرض کنید $y \in Y$ دلخواه باشد. از این که $h: Y \to X$ لذا $h(y) \in X$. قرار می‌دهیم $x = h(y)$. در این صورت:

$$f(x) = f(h(y)) = f \circ h(y) = y.$$

و این بدین معنی است که f پوشاست.

صفحه ۶۸، تمرین ۱۷.

$A,B,C,D \neq \emptyset$

$$A\times B = C\times D \longleftrightarrow A = C \,,\; B = D$$

حل. اگر $A=C$ و $B=D$ آنگاه به وضوح $A\times B = C\times D$.

برعکس فرض می‌کنیم $A\times B = C\times D$، می‌خواهیم نشان دهیم $A=C$.

برای این منظور $x\in A$ را دلخواه می‌گیریم. از این که $B\neq\emptyset$ لذا $b\in B$ وجود دارد.

اکنون: $(x,b)\in A\times B \xrightarrow{A\times B = C\times D} (x,b)\in C\times D \longrightarrow x\in C$

بنابراین $A\subseteq C$. به طور مشابه (از غیرتهی بودن D) نتیجه می‌شود $C\subseteq A$ و لذا $A=C$،

به طریق مشابه $B=D$ در حکم ثابت می‌شود.

صفحه ۷۱، تمرین ۱۷، R رابطه‌ای روی X

الف. R انعکاسی $\longleftrightarrow \Delta_X \subseteq R$.

توجه: $\Delta_X = \{(x,x) \mid x\in X\}$.

ابتدا فرض کنید R انعکاسی است. می‌خواهیم نشان دهیم $\Delta_X\subseteq R$.

برای این منظور $(x,x)\in\Delta_X$ را دلخواه می‌گیریم. از آنجا که R انعکاسی است

لذا $(x,x)\in R$. پس $\Delta_X\subseteq R$،

برعکس فرض کنید $\Delta_X\subseteq R$. می‌خواهیم نشان دهیم R انعکاسی است

برای این منظور $x\in X$ را دلخواه می‌گیریم. به وضوح $(x,x)\in\Delta_X$ و چون $\Delta_X\subseteq R$

لذا $(x,x)\in R$ و بنابراین R انعکاسی است.

ب. R متقارن است $\Leftrightarrow$ $R=R^{-1}$.

ابتدا فرض کنید R متقارن باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $R=R^{-1}$،

$$(x,y)\in R \xrightarrow{\text{متقارن } R} (y,x)\in R \xrightarrow{\text{تعریف } R^{-1}} (x,y)\in R^{-1} \Rightarrow R\subseteq R^{-1}$$

$$(x,y)\in R^{-1} \xrightarrow{\text{تعریف } R^{-1}} (y,x)\in R \xrightarrow{\text{متقارن } R} (x,y)\in R \Rightarrow R^{-1}\subseteq R$$

بنابراین $R=R^{-1}$

برعکس: فرض کنید $R=R^{-1}$. می‌خواهیم نشان دهیم R متقارن است. برای این منظور $(x,y)\in R$ را دلخواه می‌گیریم.

$$(x,y)\in R \xrightarrow{R=R^{-1}} (x,y)\in R^{-1} \xrightarrow{\text{تعریف } R^{-1}} (y,x)\in R$$

بنابراین R متقارن است.

پ. R انعکاسی $\Leftrightarrow$ R^{-1} انعکاسی

ابتدا فرض کنید R انعکاسی باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم R^{-1} انعکاسی است.

برای این منظور $x\in X$ را دلخواه می‌گیریم. از این که R انعکاسی است لذا $(x,x)\in R$

و بنابراین $(x,x)\in R^{-1}$. بنابراین R^{-1} انعکاسی است.

مشابهاً R^{-1} انعکاسی است $\Leftarrow$ R انعکاسی است.

ت. R متقارن است $\Leftrightarrow$ R^{-1} متقارن

فرض می‌کنیم R متقارن است. می‌خواهیم ثابت کنیم R^{-1} نیز متقارن است.

$$(x,y)\in R^{-1} \xrightarrow[\text{تعریف } R^{-1}]{} (y,x)\in R \xrightarrow[\text{متقارن } R]{} (x,y)\in R \xrightarrow[R^{-1}]{\text{تعریف}} (y,x)\in R^{-1}$$

پس R^{-1} متقارن است.

مشابهاً از متقارن بودن R^{-1}، متقارن بودن R نتیجه می‌شود.

ث. R متعدی $\longleftrightarrow$ R^{-1} متعدی

ابتدا فرض کنید R متعدی است، می‌خواهیم نشان دهیم R^{-1} نیز متعدی است.

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in R^{-1}\\ (y,z)\in R^{-1}\end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l}(y,x)\in R\\ (z,y)\in R\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{متعدی } R} (z,x)\in R \longrightarrow (x,z)\in R^{-1}$$

پس R^{-1} متعدی است.

مثل بالا، R^{-1} متعدی نتیجه می‌دهد R متعدی است.

ج. R هم‌ارزی $\longleftrightarrow$ R^{-1} هم‌ارزی

نتیجه‌ی پ، ت و ث

صفحه ۷۲، تمرین ۱۵.

R یک رابطه روی X است. نشان دهید $R\cup R^{-1}$ متقارن است،

$$(x,y)\in R\cup R^{-1} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x,y)\in R \longrightarrow (y,x)\in R^{-1}\\ \text{یا}\\ (x,y)\in R^{-1} \longrightarrow (y,x)\in R\end{array}\right\} \longrightarrow (y,x)\in R\cup R^{-1}$$

بنابراین $R\cup R^{-1}$ متقارن است.

اگر S رابطه‌ی متقارن بوده و $R\subseteq S$ آنگاه $R\cup R^{-1}\subseteq S$.

$$(x,y)\in R\cup R^{-1} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x,y)\in R \xrightarrow{R\subseteq S} (x,y)\in S\\ (x,y)\in R^{-1} \xrightarrow[R]{\text{تعریف}} (y,x)\in R \xrightarrow{R\subseteq S} (y,x)\in S\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\text{متقارن } S} (x,y)\in S$$

پس در هر حال $(x,y)\in S$. بنابراین $R\cup R^{-1}\subseteq S$،

همان طور که ملاحظه می‌کنید، $R\cup R^{-1}$ مجموعه‌ای متقارن و شامل R است. ($R\subseteq R\cup R^{-1}$). اما نشان دادیم اگر S نیز متقارن و شامل R باشد آنگاه $R\cup R^{-1}\subseteq S$. بنابراین $R\cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه‌ی متقارن و شامل R است.

صفحه ۷۳، تمرین ۱۶.

R یک رابطه‌ای روی X است. نشان دهید $R \cap R^{-1}$ متقارن است.

$$(x,y) \in R \cap R^{-1} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \in R^{-1} \\ \text{و} \\ (x,y) \in R^{-1} \longrightarrow (y,x) \in R \end{array} \right\} \rightarrow (y,x) \in R \cap R^{-1}$$

بنابراین $R \cap R^{-1}$ متقارن است.

اگر S رابطه‌ای متقارن بوده و $S \subseteq R$ آنگاه $S \subseteq R \cap R^{-1}$

$$(x,y) \in S \xrightarrow{S \subseteq R} (x,y) \in R$$

S متقارن $\downarrow$

$$(y,x) \in S \xrightarrow{S \subseteq R} (y,x) \in R \xrightarrow[R^{-1}]{\text{تعریف}} (x,y) \in R^{-1}$$

بنابراین $(x,y) \in R \cap R^{-1}$. بنابراین $S \subseteq R \cap R^{-1}$.

همان طور که ملاحظه می‌شود، $R \cap R^{-1}$ رابطه‌ای متقارن و مشمول در R است، ($R \cap R^{-1} \subseteq R$) بعلاوه اگر S نیز متقارن و مشمول در R باشد آنگاه $S \subseteq R \cap R^{-1}$. بنابراین $R \cap R^{-1}$ بزرگترین رابطه‌ی متقارن مشمول در R است.

صفحه ۷۶، تمرین ۴

P افرازی از X است. در این صورت $\frac{X}{P} = \bigcup_{A \in P} A \times A$.

حل. یادآوری می‌کنیم که اگر P یک افراز باشد آنگاه $\frac{X}{P}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

و $x \left(\frac{X}{P}\right) y \iff A \in P$ چنان موجود باشد که $x, y \in A$.

ابتدا نشان می‌دهیم $\frac{X}{P} \subseteq \bigcup_{A\in P} A\times A$.

برای این منظور فرض کنید $(x,y)\in \frac{X}{P}$. ($x\left(\frac{X}{P}\right)y$) بنابراین $A\in P$

چنان موجود است که $x,y\in A$. بنابراین $(x,y)\in A\times A$ و لذا $(x,y)\in \bigcup_{A\in P}(A\times A)$

بنابراین $\frac{X}{P} \subseteq \bigcup_{A\in P}(A\times A)$.

برعکس: فرض کنید $(x,y)\in \bigcup_{A\in P}(A\times A)$. پس به ازای یک $A\in P$،

$(x,y)\in A\times A$. یعنی $A\in P$ موجود است که $x,y\in A$، لذا به تعریف

$x\left(\frac{X}{P}\right)y$. یعنی $(x,y)\in \frac{X}{P}$ پس $\bigcup_{A\in P}(A\times A)\subseteq \frac{X}{P}$ و حکم ثابت می‌شود.

صفحه ۸۴، تمرین ۱۶

$X=[0,1]$، تابع $f:X\to X$ را چنان بیابید که به عنوان یک رابطه، متقارن باشد.

حل. قرار می‌دهیم $f:[0,1]\to[0,1]$، $f(x)=1-x$. نشان می‌دهیم تابع f به عنوان یک رابطه، متقارن است:

$$(x,y)\in f \longrightarrow y=f(x)=1-x \longrightarrow x=1-y=f(y)$$
$$\longrightarrow (y,x)\in f$$

توجه کنید تابع f متقارن است هرگاه نمودار آن نسبت به خط $x=y$ متقارن باشد.

صفحه ۸۴، تمرین ۱۷. $f,g:X\to Y$ و $f\subseteq g$. ثابت کنید $f=g$.

حل. به وضوح $\mathrm{Dom}f=X=\mathrm{Dom}g$. حال فرض کنید $x\in X$ دلخواه باشد. اگر $f(x)=y$

آنگاه $(x,y)\in f$ و چون $f\subseteq g$ لذا $(x,y)\in g$. پس $y=g(x)$. یعنی $f(x)=g(x)$.

پس $f=g$.

صفحه ۸۷ تمرین ۴. $f: X \to Y$ ، $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$

الف. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

فرض کنید $x \in A$. در این صورت $f(x) \in f(A)$ و لذا $x \in f^{-1}(f(A))$.
پس $A \subseteq f^{-1}(f(A))$،

ب. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

فرض کنید $y \in f(f^{-1}(B))$. در این صورت $x \in f^{-1}(B)$ چنان موجود است که $y = f(x)$. حال از این که $x \in f^{-1}(B)$ نتیجه می‌شود $f(x) \in B$. اما $y = f(x)$.
بنابراین $y \in B$. پس $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

صفحه ۹۲ تمرین ۱۲. $f: X \to Y$ ، $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$.

الف. اگر f یک به یک باشد آنگاه $f^{-1}(f(A)) = A$.

حل. در تمرین ۴ صفحه ۸۷ ثابت کردیم $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ (بدون استفاده از ۱-۱ بودن) است. فرض کنید $x \in f^{-1}(f(A))$. بنابراین $f(x) \in f(A)$. بنابراین $x' \in A$ موجود است که $f(x) = f(x')$. اما f یک به یک است پس $x = x'$. و از این که $x' \in A$ نتیجه می‌شود $x \in A$ پس $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ و حکم ثابت می‌شود.

ب. اگر f پوشا باشد، آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$.

حل. در تمرین ۴ صفحه ۸۷، (بدون استفاده از پوشایی) ثابت کردیم $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ است. فرض کنید $y \in B$ در این صورت از پوشا بودن f نتیجه می‌شود $x \in X$ موجود است که $y = f(x)$، پس $f(x) \in B$ و لذا $x \in f^{-1}(B)$. بنابراین $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. پس $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ و حکم ثابت می‌شود.

صفحه ۹۲ تمرین ۱۳ . $f: X \to Y$

الف . اگر برای هر $A \subseteq X$ ، $f^{-1}(f(A)) = A$ آنگاه f یک به یک است .

حل . فرض کنید $f(x_1)=f(x_2)$. قرار می‌دهیم $A=\{x_2\}$.

$$x_2 \in A \to f(x_2) \in f(A) \to f(x_1) \in f(A) \to x_1 \in \underbrace{f^{-1}(f(A))}_{A}$$

$$\to x_1 \in A = \{x_2\} \to x_1 = x_2 .$$

پس f یک به یک است .

ب . اگر برای هر $B \subseteq Y$ ، $f(f^{-1}(B)) = B$ آنگاه f پوشاست .

حل . می‌دانیم همواره $f^{-1}(Y)=X$. بنابراین $f(f^{-1}(Y)) = f(X)$.

از طرفی بنا به فرض ، $f(f^{-1}(Y))=Y$. پس $f(X)=Y$ و لذا f پوشاست .