مثلاً $y' + 4xy = 0$ که $y = y(x) = ?$ مجهول است.

$y = \sin x$
$y = \cos x$ ← $y'' + y = 0$

تشخیص نوع معادله، تیپ معادله، مهم است.

## فصل اول: تعاریف و مفاهیم مقدماتی:

**تعریف:** هر رابطه بین تابع مجهول، متغیرهای مستقل و مشتقات تابع مجهول نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم

**تذکره:** اگر در معادله دیفرانسیل، فقط مشتقات تابع مجهول نسبت به یک متغیر مستقل وجود داشته باشد، آن را یک معادله دیفرانسیل معمولی (عادی)، و اگر مشتقات تابع مجهول نسبت به دو یا چند متغیر مستقل وجود داشته باشد آن را یک معادله دیفرانسیل جزئی (معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی) می‌نامند.

**مثال:**

(1) $y' - 4xy = \sin x$
(2) $x^2 y'' + (y')^4 = e^x y$

یک معادله دیفرانسیل عادی

(3) اگر $u = u(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

معادله دیفرانسیل جزئی

**تذکره:** هدف ما در این درس بررسی و مطالعه معادلات دیفرانسیل معمولی است.

**جواب یک معادله دیفرانسیل:** هر تابع که در یک معادله دیفرانسیل صدق می‌کند، یک جواب آن معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

**مثال:** تابع $y_1 = \sin(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_1' = \cos x \\ y_1'' = -\sin x \end{cases} \rightarrow -\sin x + \sin x = 0$$

همچنین $y_2(x) = \cos(x)$ نیز یک جواب این معادله دیفرانسیل است.

مثال: تابع $y_1 = e^{4x}$ یک جواب معادله $y'' - 3y' - 4y = 0$ است

همچنین $y_2 = e^{-x}$ .

مثال: $y \equiv 0$ (معادل با صفر) یک جواب معادله $y^2 + y'^2 = 0$ است و تنها جواب این معادله نیز است.

مثال: الزاماً هر معادله دیفرانسیلی دارای جواب نیست، زیرا مثلاً هیچ تابع حقیقی برحسب $x$ وجود ندارد که $|y'| + 2 = 0$

تعریف (مرتبه و درجه): به بزرگترین مرتبه مشتق تابع مجهول موجود در معادله دیفرانسیل، مرتبه معادله دیفرانسیل گویند.
همچنین اگر بتوان معادله دیفرانسیل را به صورت یک چندجمله‌ای برحسب تابع مجهول و مشتقات آن بنویسیم، آن‌گاه بیشترین توان بزرگترین مرتبه مشتق موجود را درجه معادله می‌نامند.

مثال: ① $x^2y'' + 4\sin x (y')^3 = 7xy - 1$

از مرتبه ۲ - از درجه ۱

② $4y''' + e^y (y'')^4 = 4e^x + xy^5$ از مرتبه ۳

این یک چندجمله‌ای برحسب $y$ و $y'$ و $y''$ و $y'''$ نیست ← درجه برای آن تعریف نمی‌شود
نسبت به $y$ ثابت نیست پس چندجمله‌ای نیست

$yy''$ ضریب برحسب $y$ است.

تعریف: (جواب عمومی) یک معادله دیفرانسیل ممکن است یک جواب و یا بی‌نهایت جواب داشته باشد که همگی از یک فرمول کلی که دارای یک یا چند ضریب ثابت دلخواه است پیروی کنند. به چنین فرمول کلی‌ای، جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌گویند.

یک ثابت دلخواه

تذکر: جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به شکل $g(x,y,c)=0$ است.

همچنین جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به شکل $g(x,y,c_1,c_2)$ است

ثابت های دلخواه

مثال: مثلاً جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $yy'+x=0$ به صورت $x^2+y^2=c^2 \rightarrow x^2+y^2=(c)^2$ است.

یک ثابت دلخواه

و یا مثلاً جواب عمومی معادله مرتبه دوم $y''+y=0$ به شکل $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ است.

تعریف (جواب خصوصی): هرگاه در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل به ثابت های دلخواه اعداد مشخصی نسبت دهیم (و یا به نوعی جواب عمومی معادله تحت شرایط اولیه قرار بگیرد) جواب به دست آمده را یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل می نامند.

مثال: جواب مسأله مقدار اولیه زیر را بدست آورید.

شرایط اولیه مسأله $y'(0)=1$ $\quad y(0)=-2$ $\quad y''+y=0$

جواب عمومی: $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

$$y(0)=-2 \rightarrow -2=c_1\cos(0)+c_2\sin(0) \rightarrow \boxed{c_1=-2}$$

$$y'(0)=1 \rightarrow 1=-c_1\sin(0)+c_2\cos(0) \rightarrow \boxed{c_2=1}$$

$$y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$$

پس: جواب مسأله: $y=-2\cos x+\sin x$ (که یک جواب خصوصی مسأله است)

تعریف (جواب غیرعادی): به جوابی از معادله دیفرانسیل که از فرم جواب عمومی پیروی نمی کند (یعنی به ازای هیچ مقداری از ضرایب ثابت در جواب عمومی، بدست نمی آید) را یک جواب غیرعادی می نامند.

$y'=2\sqrt{y}$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت $y=(x+c)^2$ است. (*)

از طرفی $y\equiv 0$ نیز جوابی از معادله است ولی از فرم جواب عمومی (*) پیروی نمی کند لذا $y\equiv 0$ یک جواب غیرعادی است.

تو جواب عمومی به جای c باید یه عدد بذاریم تا y صفر بشه که $x-c$ ثابت نیست

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \quad \leftarrow \quad y' = 2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2dx \qquad \int y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \int 2\, dx$$

$$y^{\frac{1}{2}} = x + \frac{c}{2} \qquad y = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 = (x + c_1)^2$$

مثال: جواب عمومی معادله $y = xy' + y'^2$ به صورت $y = cx + c^2$ است

از طرفی $y = -\frac{1}{4}x^2$ نیز جوابی از معادله است ← جایگذاری

ولی از روی جواب عمومی بدست نمی‌آید و لذا یک جواب غیرعادی است.

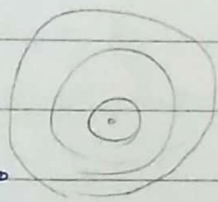
معادلات دیفرانسیل یک دسته منحنی:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به شکل $F(x,y,y') = 0$ (1) دارای جواب عمومی به شکل $g(x,y,c) = 0$ (2) است که تعبیر هندسی آن یک دسته منحنی در صفحه مختصات است.

حال اگر از طرفین (2) نسبت به $x$ مشتق بگیریم داریم: $g_x + y'g_y = 0$ (3)

با حذف ثابت $c$ در (2) و (3) به معادله دیفرانسیل (1) خواهیم رسید که معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های (2) نام دارد.

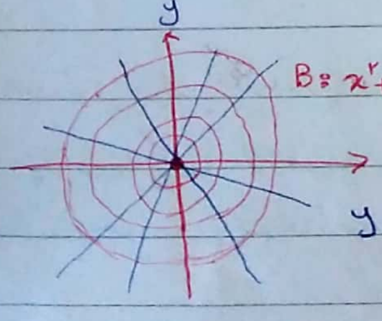
$$x + yy' = 4ye^x \qquad \underbrace{x + yy' - 4ye^x}_{F(x,y,y')} = 0$$



$$x^2 + y^2 = c^2 \longrightarrow g(x,y,c)$$

هر منحنی بر تک تک خط‌ها عمود است.

و هر خط بر تک تک منحنی‌ها عمود است.




$B: x^2 + y^2 = c^2$

$y = mx \longrightarrow A$ مجموعه → معادله دیفرانسیل A → معادله دیفرانسیل B

$m_1 m_2 = -1$ $\qquad y' \to -\frac{1}{y'}$

$y'_2 = m_2 = -\frac{1}{m_1}$, $m_1 = y'_1$

با حل آن دسته منحنی‌های B بدست می‌آید.

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های زیر را بدست آورید.

① $y = ce^{5x}$ c های مختلف ← دسته منحنی‌های مختلف.

مشتق گیری نسبت به x

$$y' = 5ce^{5x} \quad \xrightarrow[c]{\text{حذف ثابت}} \quad \frac{y}{y'} = \frac{ce^{5x}}{5ce^{5x}}$$

در معادله ① یک ثابت c داریم پس یکبار مشتق گیری.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y}{y'} = \frac{1}{5}} \checkmark \longrightarrow y' = 5y$$

② $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ① دو ثابت $c_1$ و $c_2$ داریم پس دوبار مشتق گیری. جواب عمومی به شکل $y'' + y = 0$ است.

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x \quad ②$$

$$\Rightarrow ① + ② : \boxed{y + y'' = 0}$$

③ $y = c_1 e^x + c_2 \cos x$ ① دوبار مشتق گیری نسبت به x

$$y' = c_1 e^x - c_2 \sin x \quad ②$$

چون سه تا معادله داریم از روی دوتا از آن‌ها $c_1$ و $c_2$ را حساب کرده و در سومی جایگزاری کرده.

$$y'' = c_1 e^x - c_2 \cos x \quad ③$$

ابتدا تعیین $c_1$ و $c_2$:

$$① + ③ : y + y'' = 2c_1 e^x \rightsquigarrow \boxed{c_1 = \frac{y + y''}{2e^x}}$$

← در ① *

از دستگاه شامل ① و ③ ← یا هردو رابطه از بین ①، ② و ③

$$\begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 \cos x & (1) \\ y'' = c_1 e^x - c_2 \cos x & (3) \end{cases}$$

جایگذاری * در ①:

$$y = \frac{y + y''}{2e^x} \times e^x + c_2 \cos x$$

$$\rightarrow c_2 = \frac{y - \frac{y+y''}{2}}{\cos x} = \frac{y - y''}{2\cos x}$$

$c_1$ و $c_2$ را در ② قرار دهید.

$$y' = \frac{y + y''}{2e^x} \times e^x - \frac{y - y''}{2\cos x} \times \sin x$$

پس از ساده کردن: $(1+\tan x)y'' - 2y' + (1 - \tan x)y = 0$

تمرین: معادله دیفرانسیل همه دایره‌ای در صفحه مختصات که مرکزشان روی محور $x$ها قرار دارد را به دست آورید.

باید ضابطه‌ی دسته منحنی را بنویسیم.

چون مرکز روی محور $x$ها ($y^2$) تنها داریم

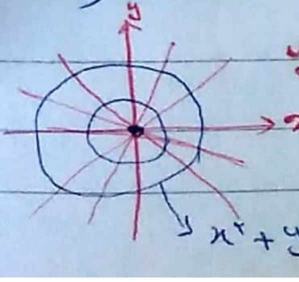
دایره به مرکز $(c_1, 0)$ و شعاع $c_2$.

$$(x - c_1)^2 + y^2 = c_2^2$$

مسیرهای قائم (متعامد): اگر در دو دسته منحنی A و B، هر یک از منحنی‌های A بر همه‌ی منحنی‌های B عمود باشد و بالعکس، در این صورت A و B را مسیرهای متعامد می‌نامیم.

مثال: دو دسته منحنی $y = mx$ (A) و $x^2 + y^2 = c^2$ (B) متعامدند و لذا مسیرهای متعامد یکدیگرند

$y = mx : A$




$x^2 + y^2 = c^2 : B$

تذکر: اگر یک دسته منحنی A معلوم باشد و هدف یافتن مسیر متعامد آن (یعنی دسته منحنی B) باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله اول: معادله دیفرانسیل دسته منحنی A را به دست می‌آوریم.

مرحله دوم: به جای $y'$ ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم. (زیرا طبق ویژگی شیب خطوط مماس در نقطه تقاطع دو منحنی متعامد، به صورت $m_1 m_2 = -1$ است

$\to m_2 = -\frac{1}{m_1}$ ، $m_2 \to y'_2$ ، $m_1 \to y'_1$

مرحله سوم: معادله دیفرانسیل جدید را حل می‌کنیم. که جواب عمومی آن همان مسیر متعامد A یعنی B است.

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی‌های زیر را مشخص کنید:
یک سوال به این شکل در امتحان داریم چون مطالب فصل ① و ② را پوشش می‌دهد.

① $y = cx^2 \to A$

یک ثابت

مرحله اول: تعیین معادله دیفرانسیل A

$y' = 2cx \xrightarrow{\text{حذف } c} \frac{y}{y'} = \frac{cx^2}{2cx} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{2}$

مرحله دوم: $y' \to -\frac{1}{y'}$ : $\frac{y}{-\frac{1}{y'}} = \frac{x}{2} \Rightarrow -yy' = \frac{x}{2}$ (*)

مرحله سوم: (روش حل در فصل ۲) حل (*) $\to -y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$

$\xrightarrow{\text{تفکیک‌پذیر}} -y\,dy = \frac{1}{2}x\,dx \to -\int y\,dy = \frac{1}{2}\int x\,dx$

$\to \boxed{-\frac{y^2}{2} = \frac{1}{4}x^2 + C} \to B$

② $\int^{x} t^2\, y(t)\, dt = C + x^3 y(t)$ کار به حد انتگرال نداریم

یک دسته منحنی است پس مشتق می‌گیریم. چون یک ثابت C داریم یکبار مشتق می‌گیریم. (نسبت به x)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right) = v'(x)\, f(v(x)) - u'(x)\, f(u(x))$$

مشتق گیری: $x^2 y(x) = 0 + 3x^2 y(x) + x^3 y'(x)$

$\to -2x^2 y = x^3 y' \to -2y = xy'$

مرحله دوم: $y' \to -\frac{1}{y'}$ $\quad -2y = x\left(-\frac{1}{y'}\right) \to 2yy' = x \quad (*)$

مرحله سوم: تفکیک پذیر $(*) \to \cdots \to$ $\boxed{y^2 = \frac{x^2}{2} + C}$ B

حل $(*)$

? ③ $y^2 = Cx^3 + x^2 - 1$ ① . یک ثابت C داریم ← یک بار مشتق گیری

$2yy' = 3Cx^2 + 2x$ ②

طرفین معادله ① $\times 3$: $3y^2 = 3Cx^3 + 3x^2 - 3$

معادله ② $x \times$: $2xyy' = 3Cx^3 + 2x^2$

$3y^2 - 2xyy' = x^2 - 3$

? از ① C محاسبه سپس در ② قرار میدهیم ← لذا C حذف می‌شود.

$C = \frac{y^2 - x^2 + 1}{x^3} \xrightarrow{\text{در ②}} 2y'y = 3\left(\frac{y^2 - x^2 + 1}{x^3}\right)x^2 + 2x$

$$2y'y = \frac{3y^2 - 3x^2 + 3 + 2x^2}{x} \rightarrow 2y'y = \frac{3y^2 - x^2 + 3}{x}$$

مرحله دوم : $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$ : $2\left(-\frac{1}{y'}\right) y = \frac{3y^2 - x^2 + 3}{x}$

$$\rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2 - 3} \quad (*)$$

مرحله سوم : حل (*)

روش اول : با عامل انتگرال ساز $\rightarrow \mu(y) = y^{-2}$ کامل می شود

روش دوم : (*) یک معادله برنولی بر حسب $\frac{dx}{dy}$ است.

در هر دو روش $\longrightarrow$ (*) جواب : $\boxed{x^2 + 3y^2 - 3 = cy}$ B

## فصل ۲ : معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

معادلات دیفرانسیلی مرتبه اولی که در این فصل به آن ها می پردازیم به قرار زیر هستند:

۱- معادلات تفکیک پذیر (جدایی پذیر)

۲- معادلات همگن

۳- معادلات کامل ← خطی جوابهای باشد

۴- معادلات مرتبه اول خطی و برخی غیرخطی مانند برنولی، ریکاتی، کلرو و لاگرانژ

معادلات تفکیک پذیر به شکل کلی زیر هستند:

$$M(x) + N(y) \cdot y' = 0$$

یا

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

که با انتگرال گیری از طرفین، جواب عمومی بدست می آید.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

① $y' = e^{2x+3y} \xrightarrow{\text{حل}} \frac{dy}{dx} = e^{2x} e^{3y}$

$\xrightarrow{\text{تفکیک پذیر}} \frac{dy}{e^{3y}} = e^{2x}\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \int e^{-3y}\,dy = \int e^{2x}\,dx$

$\rightarrow -\frac{1}{3} e^{-3y} = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

همیشه y برحسب x نیست، فقط رابطه‌ای بین x و y برقرار باشد.

② $\overset{\frac{dy}{dx}}{y'} = 1 + x^2 + \underbrace{y^2 + x^2y^2}_{y^2(1+x^2)}$

$y' = 1 + x^2 + y^2(1+x^2) \rightarrow y' = (1+x^2)(1+y^2) \xrightarrow{\text{تفکیک پذیر}}$

$\rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2)\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+x^2)\,dx$

$\rightarrow \operatorname{Arc\,tan}(y) = x + \frac{x^3}{3} + C$

تمرین: تعیین جواب عمومی

① $2x(y+1)\,dx + (x^2-1)\,dy = 0$ × ✓

? ② $y' = \tan x \tan y$

③ $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$

نکته: معادلات دیفرانسیل به شکل $y'=f(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $ax+by+c=u$ به تفکیک پذیر تبدیل می‌شوند.

مثال:

① $y'=(\underbrace{3x+4y-5}_{ax+by+c})^2$

نگاه می‌کنیم به معادله ← تفکیک پذیر نیست

برای بدست آوردن $y'$ به مشتق می‌گیریم

$3x+4y-5=u$

مشتق از طرفین نسبت به $x$

$3+4y'=u' \Longrightarrow y'=\frac{u'-3}{4}$ در معادله قرار می‌دهیم

$\frac{u'-3}{4}=u^2 \longrightarrow u'-3=4u^2 \Rightarrow u'=4u^2+3$ تفکیک پذیر

$$\frac{du}{dx}=4u^2+3 \xrightarrow{\text{تفکیک}} \frac{du}{4u^2+3}=dx \to \overset{*}{\int\frac{du}{4u^2+3}}=\underbrace{\int dx}_{x+c}$$

$$*:\int\frac{du}{4u^2+3}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{\sqrt{3/4}}\text{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{3/4}}\right)+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\times\frac{1}{\sqrt{3/4}}\text{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{3/4}}\right)=x+C$$

اگر بخواهیم ادامه بدهیم به جای $u$ مقدارش را قرار دهیم.

$$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{(\underbrace{\frac{u}{a}}_{t})^2+1}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a\,dt}{t^2+1}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{1}{a}\text{Arc}\tan(t)+C=\frac{1}{a}\text{Arc}\tan\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$\frac{du}{a}=t \longrightarrow du=a\,dt$ $\boxed{\frac{u}{a}=t}$

تمرین:

$y'=(9x+y+1)^2$

نکته: گاهی اوقات با تعویض متغیرهای مناسبی می‌توان معادله را به تفکیک پذیر تبدیل کرد.

مثال: ① $y' = (x^3 + y - 2)^2 - 3x^2$

$x^3 + y - 2 = u \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} 3x^2 + y' = u' \rightarrow y' = u' - 3x^2$

در معادله قرار میدهیم.

$u' - \cancel{3x^2} = u^2 - \cancel{3x^2} \Rightarrow u' = u^2$ تفکیک پذیر

$\downarrow \frac{du}{dx}$

$\frac{du}{u^2} = dx \rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int dx \Rightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = x + c$

$\Rightarrow \frac{-1}{u} = x + c \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{u = \dots} \dots$

تمرین ۲: $y' + 2x = 2(x^2 + y - 1)^{\frac{2}{3}}$

③ $y' = 1 + 4x \cdot e^{x-y}$ $\quad x - y \rightarrow u$

روش اول:

④ $\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1}$

$\frac{dy}{dx} \rightarrow y'$

$u = x - y$

$y - x = -u$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} u' = 1 - y' \rightarrow y' = 1 - u'$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 - u' = -u - 1 + (u + 2)^{-1}$

$\xrightarrow{\text{در منفی ضرب}} u' - 1 = u + 1 - (u + 2)^{-1} \rightarrow u' = u + 2 - \frac{1}{u + 2}$

$\rightarrow u' = \frac{(u + 2)^2 - 1}{u + 2}$ تفکیک پذیر

تفکیک و انتگرال $\longrightarrow \int \frac{(u+2)\,du}{(u+2)^2-1} = \int dx \xrightarrow[du=dt]{u+2=t} \int \frac{t\,dt}{t^2-1} = x + C$

$\xrightarrow[2t\,dt=dv]{t^2-1=v}$

$t\,dt = \frac{1}{2}\,dv \qquad \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\ln v$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(t^2-1) = x + C \xrightarrow{t=u+2=x-y+2}$

روش دوم: عبارت داخل پرانتز را u نگیریم یا ...

⑤ $(e^{\sin x}-1)\,dy + (y-1)\cos x\, e^{\sin x}\,dx = 0$

این معادله تفکیک پذیر است و داریم:

$\frac{dy}{y-1} = -\frac{\cos x\, e^{\sin x}}{e^{\sin x}-1}\,dx$

روش دوم:

انتگرال $\int \frac{dy}{y-1} = -\int \frac{\cos x\, e^{\sin x}}{e^{\sin x}-1}\,dx$

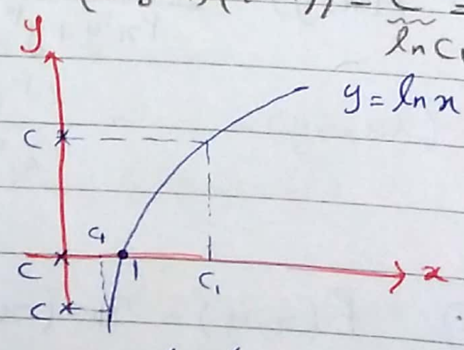
$\rightsquigarrow e^{\sin x} = t \to \cos x\, e^{\sin x}\,dx = dt \to \ln(y-1) = -\int \frac{dt}{t-1}$

$\to \ln(y-1) = -\ln(t-1) + C$ ✓

$\to \ln(y-1) + \ln(t-1) = C \to \ln((y-1)(t-1)) = \underbrace{C}_{\ln C_1} = \ln C_1$

$\to (y-1)(t-1) = C_1 \xrightarrow{t=e^{\sin x}} \dots$

با روش حل معادله کامل: روش دوم




$y = \ln x \leftarrow$ یک به یک، برد این تابع $\mathbb{R}$ است

$\forall C_1 \in \mathbb{R} \;;\; \exists C \;;\; C = \ln C_1$

## ۲- معادلات همگن:

**تعریف (تابع همگن):** تابع دو متغیره $f(x,y)$ را همگن می‌نامیم (از درجه $n$) هرگاه برای هر $\lambda>0$، و هر $(x,y)$ و $(\lambda x,\lambda y)$ در دامنه $f$، داشته باشیم:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

مثال:

① $f(x,y)=x^2-5xy$

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2-5(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2(x^2-5xy)$$

$$=\lambda^{\overset{n}{2}} f(x,y)$$

پس $f$ همگن از درجه ۲

② $f(x,y)=\dfrac{3}{x-y}$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{3}{\lambda x-\lambda y}=\frac{1}{\lambda}\times\frac{3}{(x-y)}=\frac{1}{\lambda}f(x,y)=\lambda^{-1}f(x,y)$$

پس $f$ همگن از درجه ۱-

③ $f(x,y)=\dfrac{x^3-7xy^2}{2x^2y+y^3}$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\dots=\frac{\lambda^3(x^3-7xy^2)}{\lambda^3(2x^2y+y^3)}=f(x,y)=\lambda^0 f(x,y)$$

$f$ همگن از درجه صفر

④ $f(x,y)=\sin(x+y)$ همگن نیست!

$$f(\lambda x,\lambda y)\neq\lambda^n f(x,y)$$

($\lambda$ از کمان $\sin$ بیرون نمی‌آید)

تعریف (معادله همگن): معادله دیفرانسیل (1) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را همگن می‌گوییم هرگاه هر دو تابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ همگن با درجه یکسان باشند.

در این صورت با تعریف متغیر $y = vx$ معادله (1) به تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود.

$$dy = x\,dv + v\,dx \quad \text{یا} \quad y' = v'x + v$$

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

① $\underbrace{(x^2+y^2)}_{M(x,y)}\,dx \underbrace{- 4xy}_{N(x,y)}\,dy = 0$

تفکیک‌پذیر نیست.

متفاضلی جمع است، جزو N است.

(?) هر دو همگن از درجه ۲ ← لذا معادله همگن است ← با تعریف متغیر

$y = vx$ داریم: $dy = x\,dv + v\,dx$ جایگذاری در معادله:

$$(x^2+v^2x^2)\,dx - 4x(vx)(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$\to (x^2+v^2x^2)\,dx - 4x^3v\,dv - 4x^2v^2\,dx = 0$$

$$\to (x^2+\underbrace{v^2x^2 - 4x^2v^2}_{-3x^2v^2})\,dx - 4x^3v\,dv = 0$$

$$\to x^2(1-3v^2)\,dx - 4x^3v\,dv = 0$$ تفکیک‌پذیر

$$x^2(1-3v^2)\,dx = 4x^3v\,dv \xrightarrow{\text{تفکیک واشتراک}} \int \frac{x^2\,dx}{x^3} = \int \frac{4v\,dv}{1-3v^2}$$

$$\Rightarrow \ln x = 4\int \frac{\overbrace{v\,dv}^{dt}}{\underbrace{1-3v^2}_{t}} \times \frac{-6}{-6}$$

$\to \ln x = -\frac{4}{6}\ln(1-3v^2)+C$ ✓

$\to \ln x + \frac{4}{6}\ln(1-3v^2) = C = \ln C_1$

$\to \underbrace{\ln x + \ln(1-3v^2)^{4/6}}_{\ln x(1-3v^2)^{4/6}} = \ln C_1$

$\Rightarrow x(1-3v^2)^{4/6} = C_1 \xrightarrow{v=y/x}$

② $x\sin\left(\frac{y}{x}\right) \underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}} = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x$

حل: در اصل معادله به صورت مقابل است:

$x\sin\left(\frac{y}{x}\right) dy = \left(y\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x\right) dx$

$\to \underbrace{\boxed{\left(y\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x\right)}}_{M(x,y)} dx \underbrace{- x\sin\left(\frac{y}{x}\right)}_{N(x,y)} dy = 0$

(بررسی کنید) هر دو همگن از درجه ۱

$dy = x\,dv + v\,dx$ پس با تعویض متغیر $y = vx$ داریم:

$\left(vx\sin\left(\frac{vx}{x}\right)+x\right)dx - x\sin\left(\frac{vx}{x}\right)(x\,dv+v\,dx) = 0$

$\to (vx\sin v + x)\,dx - x^2\sin v\,dv - xv\sin v\,dx = 0$

$\to (\cancel{vx\sin v} + x - \cancel{xv\sin v})\,dx - x^2\sin v\,dv = 0$

$\to x\,dx - x^2\sin v\,dv = 0$ تفکیک پذیر

$\to \dots \to$

؟ تمرین ۳:

$$(3\underbrace{\tan x}_{u} - 2\underbrace{\cos y}_{v})\underbrace{\sec^2 x\, dx}_{du} + \overset{u}{\tan x}\,\overbrace{\sin y\, dy}^{-dv} = 0$$

تفکیک پذیر نیست ، همگن نیست

$\tan x = u$

مشتق $\downarrow$ $(1+\tan^2 x)\,dx = du \rightarrow \sec^2 x\, dx = du$

$v = \cos y \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} -\sin y\, dy = dv$

$\Rightarrow (3u - 2v)\,du - u\,dv \overset{(*)}{=} 0 \rightarrow$ برای حل

$\mu(u) = u$

روش سوم: با عامل انتگرال ساز

روش اول: یک معادله همگن

روش دوم: از فرمول کلی معادله خطی مرتبه اول برحسب $\frac{dv}{dx}$

روش اول: یک معادله همگن (از درجه ۱ (؟)) $\leftarrow$ با تغییر متغیر

$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{(3x - 2y)}_{M(x,y)}dx \underbrace{-x}_{N(x,y)}dy = 0 \\ \text{همگن از درجه ۱} \\ \text{با } y = vx \rightarrow dy = x\,dv + v\,dx \ \ldots \end{array}}$$

اگر نمادگذاری سخت شد این کار را بکنیم. بعد آخرش به جای $x$ و $y$ همون $u$ و $v$ بذاریم.

$v = su \rightarrow dv = u\,ds + s\,du \rightarrow$ در معادله $(*)$ قرار میدهیم

$(3u - 2su)\,du - u(u\,ds + s\,du) = 0$

$\rightarrow \underbrace{(3u - 2su - us)}_{3u-3su}\,du - u^2 ds = 0$

$\rightarrow 3u(1-s)\,du - u^2 ds = 0$ تفکیک پذیر

$\xrightarrow{\text{تفکیک و انتگرال}} \int \frac{3u\,du}{u^2} = \int \frac{ds}{1-s} \rightarrow -\int \frac{ds}{s-1}$

$\rightarrow 3\ln u = -\ln(s-1) + c$ ✓

$\rightarrow \ln u^4 + \ln(s-1) = \ln c_1$

$\rightarrow \ln\{u^4(s-1)\} = \ln c_1 \rightarrow u^4(s-1) = c_1$

$u = \tan x$

$\longrightarrow$ ......

$s = \frac{v}{u} = \frac{\cos y}{\tan x}$

روش دوم :

$\xrightarrow[\text{بر } -udu \text{ تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین } (*)} \frac{dv}{du} + \frac{2}{u} v = 3 \xrightarrow{\text{خطی مرتبه اول}}$

$\frac{2}{u} \rightarrow p(u)$ ، $3 \rightarrow q(u)$

$$v = e^{-\int p(u)\,du}\left\{\int q(u)\, e^{\int p(u)\,du}\, du + c\right\} = ??$$

نکته ۱ : معادلات به شکل $y' = f\left(\frac{ax+by}{a'x+b'y}\right)$ همگن هستند.

لذا با $y = vx$ ← تفکیک‌پذیر ← حل!

نکته ۲ : معادلات به شکل $y' = f\left(\frac{\overbrace{ax+by+c}^{u}}{\underbrace{a'x+b'y+c'}}\right)^{(*)}$ که $c$ و $c'$ همزمان صفر نیستند.

حالت الف : اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \rightarrow$ با تغییر متغیر $ax+by=u$ به معادله تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود.

(یعنی دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ موازی باشند)

حالت ب : اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ : $\longrightarrow$ نقطه تقاطع را حساب می‌کنیم مثلاً $A\left|\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right.$ را محاسبه می‌کنیم.

(یعنی دو خط بالا $\boxed{\text{متقاطع}}$ باشند)

با تغییر متغیرهای $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ ← معادله $(*)$ به شکل

$\rightarrow dx = dX$

$\rightarrow dy = dY$

Subject:
Year : Month : Day : ( )



$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{a'x+b'y}\right)$$

تبدیل می‌شود که طبق نکته ۱، همگن است که با حاصل آن آشناییم.

? تمرین : $y' = \dfrac{3x+5y}{x-4y}$

مثال : معادلات زیر را حل کنید

(1) $y' = \dfrac{2x+y-1}{\boxed{4x+2y}+5}$

$a=2 \quad b=1 \quad a'=4 \quad b'=2 \quad c=-1 \quad c'=5$

$\frac{a}{a'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{b'} = \frac{1}{2}$ → $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ → حالت الف → با تغییر متغیر $2x+y=u$

مشتق: $2+y'=u'$ → $y'=u'-2$

ضرب ۲: $\boxed{4x+2y=2u}$

در معادله قرار می‌دهیم.

$$u'-2 = \frac{u-1}{2u+5}$$

$$\rightarrow u' = \frac{u-1}{2u+5} + 2 \rightarrow u' = \frac{5u+9}{2u+5} \quad \left(u' = \frac{du}{dx}\right)$$ → تفکیک‌پذیر

تفکیک و انتگرال → $\displaystyle\int \frac{(2u+5)}{5u+9}\,du = \int dx \rightarrow \frac{2}{5}\int \frac{u+5/2 \;\; (+\frac{9}{5} - \frac{9}{5})}{u+9/5}\,du = x + C$

$$\rightarrow \frac{2}{5}\left(\int \underbrace{\frac{u+9/5}{u+9/5}}_{1} + \frac{\overbrace{-9/5+5/2}^{7/10}}{u+9/5}\right) du = x + C$$

$$\rightarrow \frac{2}{5}\left(u + \frac{7}{10}\ln\left(u+\frac{9}{5}\right)\right) = x + C \quad ✓$$

$u = 2x+y \rightarrow \ldots$

مثال:

$$(x+y-1)\,dx = (x+4y-2)\,dy$$

$$\to \frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+4y-2} \ (*) \to \frac{a}{a'} = \frac{1}{1} = 1 ,\quad \frac{b}{b'} = \frac{1}{4} \to \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

→ دوخط متقاطع اند → حالت ب → محاسبه نقطه تقاطع

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+4y-2=0 \end{cases} \to \begin{cases} -x-y+1=0 \\ x+4y-2=0 \end{cases}$$

$$3y=1 \to y=\frac{1}{3} \to y_0$$

$$\to x+y-1=0$$

$$x+\frac{1}{3}-1=0 \to x=\frac{2}{3} \to x_0$$

لذا نقطه تقاطع: $A \left| \begin{array}{l} x_0=\frac{2}{3} \\ y_0=\frac{1}{3} \end{array} \right.$

اکنون با تعویض متغیر $\begin{cases} x = X+x_0 = X+\frac{2}{3} \\ y = Y+y_0 = Y+\frac{1}{3} \end{cases}$ در $(*)$ داریم:

$$(**)\quad \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X+4Y} \to (?)$$ همگن

زیرا

$$\left( \frac{dY}{dX} = \frac{X+\frac{2}{3}+Y+\frac{1}{3}-1}{X+\frac{2}{3}+4Y+\frac{4}{3}-2} = \frac{X+Y}{X+4Y} \right)$$

با تعویض متغیر

$$Y = vX$$

$$dY = X\,dv + v\,dX$$ → در $(**)$ قرار

$$\frac{X\,dv + v\,dX}{dX} = \frac{X+vX}{X+4vX}$$

$$\to X\frac{dv}{dX} + v\frac{dX}{dX} = \frac{1+v}{1+4v} \to X\frac{dv}{dX} + v = \frac{1+v}{1+4v}$$

$$\to X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v}{1+4v} - v \to X\frac{dv}{dX} = \frac{1-4v^2}{1+4v}$$ تفکیک پذیر

تفکیک و انتگرال →

$$\int \boxed{\frac{(1+4v)}{1-4v^2}}\, dv = \int \frac{dX}{X}$$

تفکیک کسر

$$\boxed{\frac{1+4v}{1-4v^2}} = \frac{1+4v}{(1-2v)(1+2v)} = \frac{A}{1-2v} + \frac{B}{1+2v} = \frac{A+2Av+B-2Bv}{(1-2v)(1+2v)}$$ تفکیک کسرها:

$$= \boxed{\frac{(2A-2B)v+(A+B)}{1-4v^2}} \Rightarrow 1+4v = (\underbrace{2A-2B}) v + (A+B)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2A-2B=4 \\ A+B=1 \end{cases}$$

$$4A=6 \longrightarrow A=\frac{3}{2} \longrightarrow B = 1-A = 1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{(1+4v)\,dv}{1-4v^2} = \int \frac{3/2}{\underbrace{1-2v}_{t}} dv + \int \frac{-1/2}{\underbrace{1+2v}_{s}} dv$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\int \frac{dt}{t} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{ds}{s}$$

$$= -\frac{3}{4}\ln t - \frac{1}{4}\ln s = -\frac{3}{4}\ln(1-2v) - \frac{1}{4}\ln(1+2v)$$

$\Rightarrow$ ادامه جواب: $-\frac{3}{4}\ln(1-2v) - \frac{1}{4}\ln(1+2v) = \ln X + C$ ✓

$$v = Y/X = \frac{y-\frac{1}{3}}{x-\frac{2}{3}} \quad ----$$

$$\longrightarrow X = x - \frac{2}{3}$$

مثال:

(3) $(2x - \boxed{\sinh(y)} + 1)\underbrace{\cosh(y)\,dy}_{du} + (4x - \boxed{2\sinh(y)}_{u})\,dx = 0$

$\sinh(y) = u$
مشتق
جایگذاری
$\cosh(y)\,dy = du$

$$\Rightarrow (2x-u+1)\,du + (4x-2u)\,dx = 0$$ ممکن نیست ?

$$\Rightarrow \underset{u'}{\frac{du}{dx}} = \frac{-(4x-2u)}{2x-u+1} = \frac{-4x+2u}{2x-u+1} \quad (*)$$

$a=4 \quad b=2$

$a'=2 \quad b'=-1$

$\frac{a}{a'} = \frac{-4}{2} = -2 = \frac{b}{b'} \Rightarrow$ دو خط موازی اند

$-4x + 2u = s \longrightarrow -4 + 2u' = s' \Rightarrow u' = \frac{s'+4}{2}$

بر ۲- تقسیم $\rightarrow 2x - u = \frac{s}{-2} \rightarrow$ در $(*)$ قرار

$\frac{s'+4}{2} = \frac{s}{-\frac{s}{2}+1} \Rightarrow \frac{s'+4}{2} = \frac{2s}{-s+2}$

$\rightarrow s' + 4 = \frac{4s}{-s+2} \rightarrow \underset{\frac{ds}{dx}}{s'} = \frac{4s}{-s+2} - 4 = \frac{8s-8}{-s+2}$ تفکیک پذیر

تفکیک و انتگرال $\longrightarrow \int \frac{(-s+2)\,ds}{8s-8} = \int dx \rightarrow \frac{-1}{8}\int \frac{\overset{+1-1}{s-2}}{s-1}\,ds = x + C$

$\rightarrow \frac{-1}{8}\left(\int \frac{s-1}{s-1}\,ds + \int \frac{-1}{s-1}\,ds\right) = x + C$

$\rightarrow \frac{-1}{8}\left(s - \ln(s-1)\right) = x + C$ ✓

$s = -4x + 2u = -4x + \sinh(y)$

$\longrightarrow$ ....

تمرین:

① $y' = \frac{-x+2y-3}{2x-4y-3} \longrightarrow \int \frac{2u+3}{4u-3}$

② $y' = \frac{y+3}{x+y-1} \longrightarrow \frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{y}$

③ $(4x + 6y + 5)\,dx - (2x + 3y + 4)\,dy = 0$

$\longrightarrow \int \frac{u+4}{8u+23}$

معادلات کامل: معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ (1) را کامل گوییم هرگاه تابعی مانند $f(x,y)$ چنان موجود باشد بطوری که داشته باشیم:

$$(2)\quad \frac{\delta f}{\delta x} = M(x,y) \quad , \quad \frac{\delta f}{\delta y} = N(x,y) \quad (3)$$

لذا داریم:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta f}{\delta x}\,dx + \frac{\delta f}{\delta y}\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad df = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x,y) = C}$$ جواب عمومی (1)

که البته برای یافتن ضابطه‌ی $f(x,y)$، ابتدا به کمک یکی از روابط (2) یا (3)، یک ضابطه‌ی اولیه برای $f$ می‌یابیم، سپس با جایگذاری در رابطه دیگر، ضابطه $f$ تکمیل می‌شود.

مثال: معادله $3x^2dx - \frac{5}{y}dy = 0$ کامل است. زیرا با انتخاب $f(x,y) = x^3 - 5\ln y$ داریم:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 3x^2 = M \quad , \quad \frac{\delta f}{\delta y} = -\frac{5}{y} = N$$

قضیه: اگر در معادله (1)، توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ روی یک دامنه مانند $D$ پیوسته باشند و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته روی $D$ باشند آن‌گاه:

معادله (1) کامل است $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in D : \frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

$$\underbrace{(3x^2 + 4xy^2)}_{M}\,dx + \underbrace{(2y - 3y^2 + 4x^2y)}_{N}\,dy = 0$$

$\frac{\delta M}{\delta y} = 8xy \qquad \frac{\delta N}{\delta x} = 8xy \Rightarrow \frac{\delta M}{\delta x} = \frac{\delta N}{\delta y} \xrightarrow{\text{از قضیه}}$ معادله کامل است پس:

جواب عمومی : $\boxed{f(x,y)=C}$ ← این جمله حتماً باید نوشته شود

که برای تعیین ضابطه f داریم:

چون معادله کامل است پس طبق تعریف داریم:

$\frac{\delta f}{\delta x} = M \quad (2) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = N \quad (3)$ از یکی از این دو استفاده می‌کنیم. فرقی ندارد.

$\delta f = M\,\delta x \rightarrow \int \delta f = \int M\,dx$

نقش c را دارد.

$\rightarrow f(x,y) = \int (3x^2 + 4xy^2)\,dx = x^3 + 2x^2y^2 + h(y)$

f را در (3) قرار می‌دهیم $\xrightarrow{\quad}$ تا h(y) نیز تعیین شود و ضابطه f تکمیل شود

$\frac{\delta f}{\delta y} = N \rightarrow \cancel{4x^2y} + h'(y) = 2y - 3y^2 + \cancel{4x^2y}$

فقط y داریم تو این ضابطه. اگر x ها ماندند می‌فهمیم که اشتباه کردیم

$\rightarrow h'(y) = 2y - 3y^2$

$\rightarrow h(y) = \int 2y - 3y^2\,dy = y^2 - y^3$

پس:

$f(x,y) = C$ جواب عمومی $\rightarrow x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3 = C$

تذکر: در مثال قبل (و سایر مثال‌ها) می‌توان برای تعیین ضابطه f ، ابتدا از (2) استفاده کرد. یعنی:

$\xrightarrow{\text{از (2)}} \frac{\delta f}{\delta y} = N \rightarrow \delta f = N\,\delta y$

$\rightarrow \int \delta f = \int N\,dy \rightarrow f(x,y) = \int (2y - 3y^2 + 4x^2y)\,dy$

همان c

$= y^2 - y^3 + 2x^2y^2 + g(x)$

که برای یافتن g(x) اکنون f را در (1) قرار می‌دهیم:

① $f$ در قرار میدهیم

$$\frac{\delta f}{\delta x} = M \to \cancel{4xy^2} + g'(x) = 3x^2 + \cancel{4xy^2}$$

$$\to g'(x) = 3x^2 \to g(x) = \int 3x^2\,dx = x^3$$

پس:

جواب عمومی : $f(x,y) = y^2 - y^3 + 2x^2y^2 + x^3 = C$

② $$\underbrace{\left(3x^2\tan y - 2\frac{y^3}{x^3}\right)}_{M} dx + \overbrace{\left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)}^{N} dy = 0 \qquad \frac{3y^2}{x^2} \to 3y^2x^{-2}$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 3x^2(1+\tan^2 y) - \frac{6y^2}{x^3} = 3x^2(\sec^2 y) - 6y^2x^{-3}$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} = 3x^2\sec^2 y - 6y^2x^{-3}$$ → باهم برابرند، معادله کامل است

جواب عمومی : $f(x,y) = C$

که برای تعیین $f$ :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = M \quad , \quad \frac{\delta f}{\delta y} = N$$

$$f(x,y) = \int M\,dx = \int\left(3x^2\tan y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx \qquad \frac{2y^3}{x^3} \to 2y^3x^{-3}$$

$$= x^3\tan y - 2y^3\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + h(y)$$

$$= x^3\tan y + \frac{y^3}{x^2} + h(y)$$

$$x^3(1+\tan^2 y) + \cancel{\frac{3y^2}{x^2}} + h'(y) = x^3\sec^2 y + 4y^3 + \cancel{\frac{3y^2}{x^2}}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 4y^3 \to h(y) = \int 4y^3\,dy = y^4$$

لذا:

جواب عمومی : $f(x,y) = C \to \boxed{x^3\tan y + \frac{y^3}{x^2} + y^4 = C}$

page : ( )

Subject:
Year : Month : Day : ( )

④ $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r(\sin\theta + \cos\theta)}{r + \sin\theta - \cos\theta}$

طرفین وسطین

$$\rightarrow \underbrace{(r + \sin\theta - \cos\theta)}_{M(r,\theta)} dr + \underbrace{r(\sin\theta + \cos\theta)}_{N(r,\theta)} d\theta = 0$$

می توان بجای $r$، $x$ و بجای $\theta$، $y$ جایگذاری و مشابه قبلی حل کنیم.

$$\Rightarrow \frac{\delta M}{\delta \theta} = \cos\theta + \sin\theta$$
$$\frac{\delta N}{\delta r} = \sin\theta + \cos\theta$$

برابرند $\rightarrow$ معادله کامل

پس : جواب عمومی : $f(r,\theta) = C$

که : $\frac{\delta f}{\delta r} = M$ , $\frac{\delta f}{\delta \theta} = N$

$$f(r,\theta) = \int M dr = \int (r + \sin\theta - \cos\theta)\, dr$$

$$= \frac{r^2}{2} + r\sin\theta - r\cos\theta + h(\theta)$$

اکنون برای یافتن $h(\theta)$، $f$ را در رابطه دوم یعنی $\frac{\delta f}{\delta \theta} = N$ جایگذاری می کنیم.

$$\cancel{r\cos\theta} + \cancel{r\sin\theta} + h'(\theta) = \cancel{r(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$\rightarrow h'(\theta) = 0 \rightarrow h(\theta) = 0$$

جواب عمومی : $f(r,\theta) = \frac{r^2}{2} + r\sin\theta - r\cos\theta = C$ ✓

(*) عامل های انتگرال ساز: گاهی اوقات وقتی معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ کامل نباشد می‌توان با ضرب تابعی مانند $\mu$ که ممکن است تابعی برحسب $x$ ($\mu=\mu(x)$) یا برحسب $y$ ($\mu=\mu(y)$) یا برحسب $x$ و $y$ ($\mu=\mu(x,y)$) می‌باشد در طرفین معادله ①، به یک معادله جدید برسیم که کامل است.

لذا جواب معادله جدید همان جواب معادله ① است.

مثال: معادله $2y\,dx + x\,dy$ کامل نیست (?) ولی با ضرب تابع $\mu=\mu(x)=x$ در طرفین این معادله داریم:

$$\underset{M_1}{2xy}\,dx + \underset{N_1}{x^2}\,dy = 0 \quad ②$$

$$\frac{\delta M_1}{\delta y} = 2x = \frac{\delta N_1}{\delta x} \rightarrow \text{معادله ② کامل است.}$$

تابع $\mu$ فوق را یک عامل انتگرال ساز معادله ① می‌نامند.

البته برای حل این معادله، روش تفکیک پذیر ساده‌ترین راه‌حل است.

اکنون ۴ حالت برای تعیین عامل های انتگرال ساز به صورت زیر تشریح می‌شود:

حالت ۱: اگر $\mu=\mu(x)$ تابعی برحسب $x$ باشد:

تابعی فقط برحسب $x$

$$\mu = \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx}$$

حالت ۲: اگر $\mu=\mu(y)$ تابعی برحسب $y$ باشد:

$$\mu = \mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}\,dy}$$

تابعی فقط برحسب $y$ است.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

① $\underbrace{(4xy+3y^2-x)}_{M}\,dx+\underbrace{(x^2+2xy)}_{N}\,dy=0$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 4x+6y \\ N_x = 2x+2y \end{array}\right\} \to \frac{M_y-N_x}{N} = \frac{(4x+6y)-(2x+2y)}{x^2+2xy} = \frac{2x+4y}{x^2+2xy}$$

$$= \frac{2(x+2y)}{x(x+2y)} = \frac{2}{x} = \text{تابعی برحسب } x = g(x)$$

پس معادله دارای عامل انتگرال سازی به شکل زیر است:

$$\mu=\mu(x)=e^{\int g(x)\,dx}$$

$$=e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

طرفین معادله را در $\mu(x)=x^2$ ضرب می‌کنیم:

$$x^2(4xy+3y^2-x)\,dx + x^2(x^2+2xy)\,dy=0$$

$$\to \underbrace{(4x^3y+3x^2y^2-x^3)}_{M_1}\,dx+\underbrace{(x^4+2x^3y)}_{N_1}\,dy=0$$

این معادله کامل است.

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 4x^3+6x^2y = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

لذا جواب عمومی آن به صورت $f(x,y)=c$ است. که برای یافتن ضابطه $f$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M_1 \to f(x,y)=\int M_1\,dx = \int(4x^3y+3x^2y^2-x^3)\,dx$$

$$= x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + h(y)$$

$\frac{\delta f}{\delta y} = N_1$

$$x^4 + \cancel{2x^3y} + h'(y) = \cancel{x^4} + 2x^3y$$

$\rightarrow h'(y) = 0 \rightarrow h(y) \overset{\text{انتخاب}}{=} 0$

جواب عمومی : $f(x,y) = x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = C$ ✓

② $(x^4 \ln x - 2xy^3)\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$

$M_y = -6xy^2$

$N_x = 6xy^2$ $\rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-6xy^2 - 6xy^2}{N} = \frac{-12xy^2}{3x^2y^2} = -\frac{4}{x} = g(x)$

$\mu = \mu(x) = e^{\int g(x)\,dx} = e^{\int -\frac{4}{x}\,dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$

در معادله ضرب

$\underbrace{(\ln x - 2x^{-3}y^3)}_{M_1}\,dx + \underbrace{3x^{-2}y^2}_{N_1}\,dy = 0 \rightarrow$

کامل است.

$\left(\frac{\delta M_1}{\delta y} = -6x^{-3}y^2 = \frac{\delta N_1}{\delta x}\right)$

$\rightarrow$ جواب عمومی : $f(x,y) = C$

که برای تعیین f:

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = M_1 \rightarrow f(x,y) = \int M_1\,dx = \int (\ln x - 2x^{-3}y^3)\,dx \\ \frac{\delta f}{\delta y} = N_1 \qquad\qquad = x\ln x - x - \frac{2x^{-2}}{-2}y^3 + h(y) \end{cases}$$

$\rightarrow \cancel{3x^{-2}y^2} + h'(y) = \cancel{3x^{-2}y^2} \rightarrow h'(y) = 0 \rightarrow h(y) = 0$

$\rightarrow$ جواب عمومی : $f(x,y) = x\ln x - x + x^{-2}y^3 = C$ ✓

فصل ۱و۲ تمرین



③ $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$

روش دوم: معادله برنولی از نوع $\frac{dx}{dy}$ به صورت $\frac{dx}{dy} + 2x = \frac{e^{-2y}}{y}$

روش اول: با عامل انتگرال ساز:

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 1 \\ N_x = 2y \end{array}\right\} \rightarrow \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1-2y}{-y} = \text{تابعی برحسب } y = h(y)$$

$$\mu(y) = e^{\int h(y)\,dy} = e^{\int \frac{1-2y}{-y}\,dy} = e^{\int (-\frac{1}{y} + 2)\,dy}$$

$$= e^{-\ln y + 2y} = e^{-\ln y} \times e^{2y} = y^{-1} e^{2y} \rightarrow$$ در معادله ضرب

$$e^{2y}\,dx + (2x e^{2y} - y^{-1})\,dy = 0$$ معادله کامل است (؟)

جواب ؟

**تمرین:**

① $y(x+y+1)\,dx + x(x+3y+2)\,dy = 0$

$$\boxed{② \; (xy + y^2)\,dx + (x + 2y - 1)\,dy = 0}$$ ?

**حالت ۳:** $\mu = x^\alpha y^\beta$:

معادلات به شکل کلی $y(Ax^{a_1}y^{b_1} + Bx^{a_2}y^{b_2})\,dx + x(Cx^{a_3}y^{b_3} + Dx^{a_4}y^{a_4})\,dy = 0$

دارای عامل انتگرال ساز به شکل $\mu = x^\alpha y^\beta$ هستند که

برای یافتن $\alpha$ و $\beta$، $\mu = x^\alpha y^\beta$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم و

سپس شرط کامل بودن را برای معادله جدید لحاظ می‌کنیم.

با یافتن $\alpha$ و $\beta$ و جایگذاری در معادله جدید، به یک معادله کامل می‌رسیم.

مثال:

① $(2x^2y+y^4)\,dx-\underbrace{(2x^3-xy^3)}\,dy=0$

$y(2x^2+y^3) \qquad x(-(2x^2-y^3))$

پس معادله عامل انتگرال سازی به شکل $\mu=x^\alpha y^\beta$ دارد. ← در معادله ضرب

$x^\alpha y^\beta(2x^2y+y^4)\,dx-x^\alpha y^\beta(2x^3-xy^3)\,dy=0$

$\to \underbrace{(2x^{\alpha+2}y^{\beta+1}+x^\alpha y^{\beta+4})}_{M_1}dx+\underbrace{(-2x^{\alpha+3}y^\beta+x^{\alpha+1}y^{\beta+3})}_{N_1}dy=0 \quad (*)$

از آنجایی که معادله جدید می‌خواهد کامل باشد باید داشته باشیم:

$\frac{\delta M_1}{\delta y}=\frac{\delta N_1}{\delta x}$ از این تساوی $\alpha$ و $\beta$ را بدست می‌آوریم.

$\to 2(\beta+1)x^{\alpha+2}y^\beta+(\beta+4)x^\alpha y^{\beta+3}=-2(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^\beta+(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+3}$

$$\begin{cases}2(\beta+1)=-2(\alpha+3)\\ \beta+4=\alpha+1\end{cases}\to\begin{cases}2\alpha+2\beta=-8\\ -\alpha+\beta=-3\end{cases}\to \beta=-\tfrac{7}{2} \text{ و } \alpha=-\tfrac{1}{2}$$

پس با جایگذاری $\alpha=-\frac{1}{2}$ و $\beta=-\frac{7}{2}$ در $(*)$ داریم:

$(2x^{3/2}y^{-5/2}+x^{-1/2}y^{1/2})\,dx+(-2x^{5/2}y^{-7/2}+x^{1/2}y^{-1/2})\,dy=0$

کامل است (?) جواب ؟

جواب عمومی: $\boxed{f(x,y)=C}$

$f(x,y)=\int M\,dx=\int 2x^{3/2}y^{-5/2}+x^{-1/2}y^{1/2}\,dx=$

(۲) $y^2(1-x^2)\,dx + (x^3y + 2x^2 + xy)\,dy = 0$

$y(y(1-x^2))$ $\qquad$ $x(x^2y + 2x + y)$

در معادله ضرب

پس معادله دارای عامل انتگرال سازی به شکل $\mu = x^\alpha y^\beta$ است.

$$(x^\alpha y^{\beta+2} - x^{\alpha+2} y^{\beta+2})\,dx + (x^{\alpha+3} y^{\beta+1} + 2x^{\alpha+2} y^{\beta} + x^{\alpha+1} y^{\beta+1})\,dy = 0 \quad (*)$$

شرط کامل بودن

$$\rightarrow \frac{\delta M_1}{\delta y} = \frac{\delta N_1}{\delta x}$$

$$\rightarrow (\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1} - (\beta+2)x^{\alpha+2}y^{\beta+1} = (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+1} + \underbrace{2(\alpha+2)}_{=0}x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\begin{cases} \beta+2 = \alpha+1 \quad (1) \\ -(\beta+2) = \alpha+3 \\ 2(\alpha+2) = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha = -2} \quad \boxed{\beta = -3}$$

در (1) صدق می کنند

$\alpha = -2$ و $\beta = -3$ را در $(*)$ قرار میدهیم:

$$(x^{-2}y^{-1} - y^{-1})\,dx + (xy^{-2} + 2y^{-3} + x^{-1}y^{-2})\,dy = 0$$

کامل (د) حل؟

(۳) $\underbrace{(xy + y^2)}_{M}\,dx - \underbrace{(x^2 + xy)}_{N}\,dy = 0$

$$\begin{cases} M_y = x + 2y \\ N_x = -2x - y \end{cases} \rightarrow M_y - N_x = 3x + 3y$$

روش اول:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3(x+y)}{-x(x+y)} = -\frac{3}{x} = g(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int g(x)\,dx} = e^{\int -3/x\,dx} = \dots = x^{-3}$$

در معادله ضرب و معادله کامل ← حل؟

روش دوم: $\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{3(x+y)}{-y(x+y)} = \frac{-3}{y} = h(y)$

$\mu(y) = e^{\int h(y)\,dy} = \dots = y^{-3}$ در معادله ضرب و معادله کامل را حل؟

روش سوم:

$M = y(x+y)$

$N = x(-(x+y))$

معادله دارای عامل انتگرال ساز به شکل $\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$ است.

حالت ۴: (حالت کلی)

اگر $\mu = \mu(z)$ که $z = g(x,y)$ معلوم است، پس در این حالت:

$$\mu_x = \frac{\delta\mu}{\delta x} = \frac{\delta\mu}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta\mu}{\delta z}\cdot z_x$$

$$\mu_y = \frac{\delta\mu}{\delta y} = \frac{\delta\mu}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta\mu}{\delta z}\cdot z_y$$

با جایگذاری این عبارات در رابطه $\mu_x \cdot N - \mu_y \cdot M = (M_y - N_x)\mu$ که در ابتدای بخش عامل های انتگرال ساز به آن اشاره شد، بدست می آید:

$$\frac{\delta\mu}{\delta z}\cdot z_x \cdot N - \frac{\delta\mu}{\delta z}\cdot z_y \cdot M = (M_y - N_x)\mu$$

$$\to \frac{\delta\mu}{\delta z}(z_x N - z_y M) = (M_y - N_x)\mu$$

تفکیک و انتگرال $\to \overbrace{\int \frac{d\mu}{\mu}}^{\ln\mu} = \int \frac{-(M_y - N_x)}{z_y M - z_x N}\,dz$

$$\to \boxed{\mu = \mu(z) = e^{\int \frac{-(M_y - N_x)}{z_y M - z_x N}\,dz}}$$

که با ضرب در طرفین معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ به یک معادله کامل می‌رسیم.

مثال: ابتدا یک عامل انتگرال ساز برای معادله زیر برحسب $Z=xy$ بیابید و سپس معادله را حل کنید:

حالت ۴

$$\left(3x+\frac{6}{y}\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x}\right)dy=0$$

عامل انتگرال ساز یک تابع است. $Z=xy$ یعنی یک تابع برحسب $xy$.

$$M_y=\frac{-6}{y^2} \qquad N_x=\frac{2x}{y}-\frac{3y}{x^2}$$

$$\frac{-(M_y-N_x)}{Z_yM-Z_xN}=\frac{-\left(-\frac{6}{y^2}+\frac{2x}{y}+\frac{3y}{x^2}\right)}{x\left(3x+\frac{6}{y}\right)-y\left(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x}\right)}=\frac{\frac{6}{y^2}+\frac{2x}{y}-\frac{3y}{x^2}}{3x^2+\frac{6x}{y}-x^2-\frac{3y^2}{x}}$$

مخرج مشترک

$$=\frac{\frac{6x^2+2x^3y-3y^3}{x^2y^2}}{\frac{3x^3y+6x^2-x^3y-3y^3}{xy}}=\frac{1}{xy}=\frac{1}{Z}$$

پس:

$$\mu=\mu(Z)=e^{\int\frac{-(M_y-N_x)}{Z_yM-Z_xN}dZ}=e^{\int\frac{1}{Z}dZ}=e^{\ln Z}=Z=xy$$

در طرفین معادله ضرب:

$$\to xy\left(3x+\frac{6}{y}\right)dx+xy\left(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x}\right)dy=0$$

$$\to \underbrace{(3x^2y+6x)}_{M_1}dx+\underbrace{(x^3+3y^2)}_{N_1}dy=0$$

کامل است (؟)

جواب عمومی: $f(x,y)=C$

$$\begin{cases}\frac{\delta f}{\delta x}=M_1\\ \frac{\delta f}{\delta y}=N_1\end{cases}\to \ldots ?$$

مثال: اگر $\mu=\mu(x^2+y^2)$ ، مطلوب است جواب عمومی معادله زیر:

$$(2x^2+2y^2+x)\,dx+(x^2+y^2+y)\,dy=0$$

$$Z=x^2+y^2 \rightarrow Z_x=2x\ ,\ Z_y=2y$$

$$\frac{-(M_y-N_x)}{Z_yM-Z_xN}=\frac{-(4y-2x)}{2y(2x^2+2y^2+x)-2x(x^2+y^2+y)}$$

$$=\frac{-(4y-2x)}{4x^2y+4y^3+2xy-2x^3-2xy^2-2xy}=\frac{-(4y-2x)}{x^2(4y-2x)+y^2(4y-2x)}$$

$$=\frac{-\cancel{(4y-2x)}}{\cancel{(4y-2x)}(x^2+y^2)}=\frac{-1}{x^2+y^2}=\frac{-1}{Z}$$

پس:

$$\mu=\mu(Z)=e^{\int\frac{-(M_y-N_x)}{Z_yM-Z_xN}dz}=e^{\int-\frac{1}{Z}dz}=e^{-\ln Z}$$

$$=Z^{-1}=\frac{1}{Z}=\frac{1}{x^2+y^2}\rightarrow$$ در معادله ضرب:

$$\underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}(2x^2+2y^2+x)}_{M_1}dx+\underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2+y)}_{N_1}dy=0$$

معادله کامل (?) $\rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y)=C$

$$\begin{cases}\dfrac{\delta f}{\delta x}=M_1\\[2mm] \dfrac{\delta f}{\delta y}=N_1\end{cases}\rightarrow f(x,y)=\int M_1\,dx=\int\frac{2x^2+2y^2+x}{x^2+y^2}dx$$

$$=\int\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dx+\int\frac{x}{x^2+y^2}dx$$

$$\rightarrow f(x,y) = 2x + \frac{1}{2} \ln (x^2+y^2) + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N_1$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2y}{x^2+y^2} + h'(y) = 1 + \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$$

$$\rightarrow \frac{y}{x^2+y^2} + h'(y) = 1 + \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow h'(y) = 1$$

$\rightarrow h(y) = y \rightarrow$ جواب عمومی: $f(x,y) = 2x + \frac{1}{2} \ln (x^2+y^2) + y = c$

## معادلات خطی مرتبه اول:

شکل کلی این معادلات به صورت زیر است: $y' + P(x)y = q(x)$

که جواب عمومی آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = y(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \left\{ \int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + c \right\}$$

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

$$\underbrace{(x^7 + 4y)}_{M}\, dx - \underbrace{2x}_{N}\, dy = 0 \qquad M_y = 4 \qquad N_x = -2$$

روش دوم:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{4-(-2)}{-2x} = \frac{6}{-2x} = \frac{-3}{x} = g(x)$$

$\rightarrow$ با ضرب: $\mu(x) = \text{----} = x^{-3}$   حل کنید

روش اول:

$$\xrightarrow{\text{بر } dx \text{ تقسیم می‌کنیم}} x^7 + 4y - 2x \overset{y'}{\frac{dy}{dx}} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{بر } -2x} -\frac{x^6}{2} - \frac{2y}{x} + y' = 0 \rightarrow y' - \overset{P(x)}{\frac{2}{x}} y = \overset{q(x)}{\frac{1}{2} x^6}$$

جواب: $y = y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left\{ q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} dx + C \right\}$

$= e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left\{ \int \frac{1}{2} x^4 e^{\int -\frac{2}{x}dx} dx + C \right\}$

$= e^{2\ln x}\left\{ \int \frac{1}{2} x^4 e^{-2\ln x} dx + C \right\} = x^2 \left\{ \frac{1}{2} x^4 \times x^{-2} dx + C \right\}$

$\to y = y(x) = x^2 \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{x^5}{5} + C \right\}$

(۲) $x^2(x^2-1)y' + x(x^2+1)y = x^2-1$

$\xrightarrow[\text{تقسیم}]{x^2(x^2-1)\ \text{بر}} y' + \frac{x(x^2+1)}{x^2(x^2-1)} y = \frac{x^2-1}{x^2(x^2-1)}$

$\longrightarrow y' + \underbrace{\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}}_{p(x)} y = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{q(x)}$

جواب عمومی: $y = y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left\{ \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} dx + C \right\}$

$= e^{-\int \underbrace{\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}}_{\text{تفکیک کسر}} dx}\left\{ \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx} dx + C \right\}$

تفکیک کسر: $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$

$\to \cdots \to A = -1,\ B = 1,\ C = 1$

$\Rightarrow e^{\int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx}\left\{ \int \frac{1}{x^2} e^{\int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx} dx + C \right\}$

$$y=y(x)=e^{\ln x-\ln(x-1)-\ln(x+1)}\left\{\int \frac{1}{x^2}\, e^{-\ln x+\ln(x-1)+\ln(x+1)}\,dx+c\right\}$$

$$=e^{\ln\left(\frac{x}{(x-1)(x+1)}\right)}\left\{\int \frac{1}{x^2}\, e^{\ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x}\right)}\,dx+c\right\}$$

$$=\frac{x}{x^2-1}\left\{\int \underbrace{\frac{1}{x^2}\times\frac{x^2-1}{x}}_{\to\ \frac{x^2-1}{x^3}}\,dx+c\right\}=\frac{x}{x^2-1}\left\{\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx+c\right\}$$

$$y=\frac{x}{x^2-1}\left\{\ln x-\frac{x^{-2}}{-2}+c\right\}$$

تمرین:

(1) $y'+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$

(2) $y'x\sin x+y(\sin x-x\cos x)=\sin x\sin x-x$ ?

یادآوری:

$$\int \tan x\,dx=-\ln(\cos x)+c$$

$$\int \cot x\,dx=\ln(\sin x)+c$$

نکته: گاهی اوقات می‌توان معادله مرتبه اول $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ را به شکل خطی مرتبه اول برحسب $\frac{dx}{dy}$ یعنی:

$$\frac{dx}{dy}+P(y)\,x=q(y)$$

در این حالت نیز مشابه حالت قبل:

جواب عمومی: $x=x(y)=e^{-\int P(y)\,dy}\left\{\int q(y)\,e^{\int P(y)\,dy}\,dy+c\right\}$

مثال: $y\,dx+(2xy-e^{-2y})\,dy=0$

روش دوم: با عامل انتگرال ساز $\mu(y)$ که قبلاً حل شد.

روش اول: با معادله خطی مرتبه اول برحسب $\frac{dx}{dy}$:

قبلاً تو مثال نوشتم به روش برنولی اصلاح کنم.

می‌توان معادله را به شکل زیر نوشت:

بر dy تقسیم $\longrightarrow \quad y\dfrac{dx}{dy} + 2xy - e^{-2y} = 0$

بر y تقسیم $\longrightarrow \quad \dfrac{dx}{dy} + 2x - \dfrac{e^{-2y}}{y} = 0$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} + \underbrace{2}_{P(y)}x = \underbrace{\frac{e^{-2y}}{y}}_{q(y)}$$

جواب عمومی: $x = x(y) = e^{-\int P(y)\,dy}\left\{ q(y)\, e^{\int P(y)\,dy} dy + c\right\}$

$$= e^{\overbrace{-\int 2\,dy}^{-2y}}\left\{\int \frac{e^{-2y}}{y}\underbrace{e^{\int 2\,dy}}_{e^{2y}} dy + c\right\} = e^{-2y}\left\{\int \frac{1}{y}\,dy + c\right\}$$

$$\Rightarrow x = e^{-2y}\{\ln y + c\}$$

① $y\,dx + (4x - xy - 2)\,dy = 0$     تمرین: $\int \dfrac{2e^{2y}}{y}dy$

★ ② $\overset{dy/dx}{y'}(x\sin y + \sin 2y) = 1$     $y' = \dfrac{1}{x\sin y + \sin 2y}$

$$x\sin y + \sin 2y = \frac{dx}{dy}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} + \underbrace{(-\sin y)}_{P(y)}x = \underbrace{\sin 2y}_{q(y)}$$ خطی مرتبه اول برحسب $\dfrac{dx}{dy}$

جواب عمومی: $x = x(y) = e^{-\int P(y)\,dy}\left\{\int q(y)\, e^{\int P(y)\,dy} dy + c\right\}$

$$= \underbrace{e^{-\int -\sin y\,dy}}_{e^{-\cos y}}\left\{\int \sin 2y\, \underbrace{e^{\int -\sin y\,dy}}_{e^{\cos y}} dy + c\right\}$$

$$x = e^{-\cos y}\left\{ \int \sin 2y \, e^{\cos y} \, dy + c \right\}$$

$$2 \sin y \cos y$$

$$\cos y = t \rightarrow -\sin y \, dy = dt$$

$$\int 2 \sin y \cos y \, e^{\cos y} dy = -2 \int t e^{t} dt = -2 (t e^{t} - e^{t})$$

$$= -2 ( \cos y \, e^{\cos y} - e^{\cos y} )$$

$$\rightarrow x = e^{-\cos y} \left\{ -2 ( \cos y \, e^{\cos y} - e^{\cos y} ) + c \right\}$$

$$\int x e^{x} dx = x e^{x} - e^{x} + c$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} ( a \sin bx - b \cos bx )$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} ( a \cos bx + b \sin bx )$$

$$\int \csc x \, dx = -\ln ( \csc x + \cot x ) + c$$

$$\int \sec x \, dx = \ln ( \sec x + \tan x ) + c$$

$$\cancel{\int \tan x \, dx = \ln ( \csc x + \cot x ) + c}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln ( \cos x ) + c$$

$$\int \cot x \, dx = \ln ( \sin x ) + c$$

معادله برنولی: به شکل کلی زیر می‌باشد: $y' + p(x)y = q(x)y^n$

$n=0 \rightarrow$ خطی مرتبه اول $\quad n=1 \rightarrow$ تفکیک پذیر

$n \in \mathbb{R} - \{0,1\} \rightarrow$

زیرا اگر $n=0$: $\quad y' + p(x)y = q(x)$ ✓ خطی

اگر $n=1$: $\quad y' + p(x)y = q(x)y$ تفکیک پذیر

$$\frac{dy}{y} = (p(x) - q(x))\,dx$$

با ضرب طرفین معادله در $y^{-n}$:

$$y'y^{-n} + p(x)\,y^{1-n} = q(x) \quad (*)$$

با تعویض متغیر $y^{1-n} = u$

$$(1-n)\,y'y^{n} = u'$$

$$\rightarrow y'y^{-n} = \frac{u'}{1-n} \xrightarrow[\text{قرار میدهیم}]{\text{در } (*)} \frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x)$$

$$\rightarrow \boxed{u' + (1-n)p(x)\,u = (1-n)\,q(x)}$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است
حل می‌کنیم.

تمرین ② #: روش دوم: ضرب در $dy$ می‌کنیم

معادله $\rightarrow -dx + (x\sin y + \sin 2y)\,dy = 0$

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{0 - \sin y}{-(-1)} = -\sin y$$

با: $\mu(y) = e^{\int -\sin y\, dy} = e^{\cos y} \longrightarrow$ ادامه...

مثال: مطلوب است جواب عمومی معادلات زیر:

(1) $dy + (4y - 8y^{-3})\,dx = 0$

تقسیم بر $dx$

$$\frac{dy}{dx} + 4y - 8y^{-3} = 0 \longrightarrow y' \underset{P(x)}{+4}\,y = \underset{q(x)}{8}\,y^{\overset{n}{-3}}$$

برنولی با $n=-3$ : $1-n=4$

با تعریف متغیر $u = y^{1-n} = y^4$ داریم:

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)\,q(x)$$

$$\rightarrow u' + 4(4)u = 4(8)$$ خطی مرتبه اول

$$\rightarrow u' + 16u = 32 \rightarrow u = u(x) = e^{-\int 16\,dx}\left\{\int 32\, e^{\int 16\,dx}\,dx + c\right\}$$

$$\rightarrow u = e^{-16x}\{2e^{16x} + c\} \checkmark \xrightarrow{u=y^4} y^4 = e^{-16x}\{2e^{16x} + c\} \checkmark$$

روش دوم: تفکیک پذیر — روش سوم: با عامل انتگرال ساز $M(y)$

$\cancel{1}$ (2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos x^2}{y}$

$$y' - \frac{1}{x}y = (2x^3\cos x^2)\,y^{-1} \rightarrow$$ برنولی با $n=-1$

$1-n=2$

با تعریف متغیر $u = y^{1-n} = y^2$ داریم:

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)\,q(x)$$

$$u' + 2\left(\frac{-1}{x}\right)u = 2(2x^3\cos x^2)$$

$$\rightarrow u' - \frac{2}{x}u = 4x^3\cos x^2 \rightarrow$$ خطی

$$\rightarrow u = u(x) = \underbrace{e^{-\int -\frac{2}{x}dx}}_{x^2} \left\{ \underbrace{\int 4x^3 \cos x^2 \, e^{\overbrace{\int -\frac{2}{x}dx}^{x^{-2}}} \, dx} + c \right\}$$

$$\int 4x \cos x^2 \, dx \xrightarrow[2x\,dx = dt]{t = x^2}$$

$$= \int 2 \cos t \, dt = 2 \sin t = 2 \sin x^2$$

$$\rightarrow u = x^2 \{ 2 \sin x^2 + c \} \xrightarrow{u = y^2} ??$$

تمرین:

(۳) $xy' - \dfrac{y}{2 \ln x} = y^2$

(۴) $y' + y = y^2 (\cos x - \sin x)$

نکته: در برخی موارد شاید نتوان معادله را به شکل برنولی $y' + p(x) y = q(x) y^n$ ← $\dfrac{dy}{dx}$ برحسب $\dfrac{dy}{dx}$ نوشت. ولی قابل تبدیل به برنولی برحسب $\dfrac{dx}{dy}$ به صورت: $\dfrac{dx}{dy} + p(y) x = q(y) x^n$ باشد که مشابه حالت قبل: با تعویض متغیر $u = x^{1-n}$ داریم

$$\frac{du}{dy} + (1-n) \, p(y) \, u = (1-n) \, q(y)$$

جواب عمومی: $u = u(y) = e^{-\int p(y)dy} \left\{ \int q(y) \, e^{\int p(y)dy} \, dy + c \right\}$

مثال: $xy' + y = 2x^2 y y' \ln y$

$$y = (2x^2 y \ln y - x) \, y' \rightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$y \, dx = (2x^2 y \ln y - x) \, dy$$

Subject: ............ Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^2y\ \ln y - x}{y} = 2x^2 \ln y - \frac{x}{y}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} + \underbrace{\left(-\frac{1}{y}\right)}_{p(y)} x = \underbrace{(2 \ln y)}_{q(y)} x^2 \rightarrow$$ برنولی برحسب $\frac{dx}{dy}$ با $n=2$

با تعویض متغیر $\rightarrow u = x^{1-n} = x^{-1}$

$$\frac{du}{dy} + (1-n)\,p(y)\,u = (1-n)\,q(y)$$

$$\rightarrow \frac{du}{dy} + (-1)\left(\frac{1}{y}\right)u = (-1)\,2\ln y \rightarrow \frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -2\ln y$$

$$u = u(y) = \underbrace{e^{-\int -1/y\, dy}}_{y} \left\{ \underbrace{\int -2\ln y\ e^{\int -1/y\, dy}\, dy}_{} + c \right\} \quad e^{\int -1/y\, dy} \rightarrow y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$u = u(y) = y\left\{-(\ln y)^2 + c\right\}$$

$$-2\int \frac{\ln y}{y}\,dy \xrightarrow[\frac{1}{y}dy = dt]{t=\ln y} = -2\int t\,dt = -2\frac{t^2}{2} = -(\ln y)^2$$

$\xrightarrow{u = x^{-1}}$ ✓✓

تکمیل مثال ③ فصل ① مسیرهای [redacted] متعامد:

مسیرهای متعامد دسته منحنی زیر را بیابید.

$$y^2 = cx^3 + x^2 - 1$$

حل ... $\rightarrow y' = \dfrac{2xy}{x^2 - 3y^2 - 3}$ روش دوم: یک معادله برنولی برحسب $\frac{dx}{dy}$ حل

$$(x^2 - 3y^2 - 3)\,dy = 2xy\,dx$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - 3y^2 - 3}{2xy}$$

TANDIS

Subject: ........................................

Year: .......... Month: .......... Day: .......... ( )

$$\to \frac{x^2}{2xy} + \frac{-3y^2-3}{2xy} = \frac{dx}{dy} \to \left(\frac{1}{2y}\right)x - \frac{(3y^2+3)}{2y}\,x^{-1} = \frac{dx}{dy}$$

$$\to \frac{dx}{dy} - \underbrace{\frac{1}{2y}}_{P(y)}\,x = \underbrace{\frac{-(3y^2+3)}{2y}}_{q(y)}\,x^{-1}$$

برنولی برحسب $\frac{dx}{dy}$ با $n=-1$ ← تعریف متغیر $u = x^{1-n} = x^2$

$$\frac{du}{dy} + (1-n)\,P(y)\,u = (1-n)\,q(y)$$

$$\to \frac{du}{dy} + 2\left(\frac{-1}{2y}\right)u = 2\left(-\frac{(3y^2+3)}{2y}\right)$$

$$\to \frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = \frac{-(3y^2+3)}{y} \qquad y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$\to u = u(y) = \underbrace{e^{-\int \frac{1}{y}dy}}_{y}\left\{\int -\frac{(3y^2+3)}{y}\,e^{\int -\frac{1}{y}dy}\,dy + c\right\}$$

$\to \ldots$

تمرین:

① $y'x^3\sin y + 2y = xy'$

② $xy'(x - 1 + xe^y) = 1$

معادله ریکاتی: به شکل $y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$ $(*)$ است که توابع $p$ و $q$ و $r$ همگی پیوسته‌اند.

اگر $y_1 = u(x)$ یک جواب معادله ریکاتی $(*)$ باشد، آنگاه

جواب عمومی: $y = u(x) + \frac{1}{v(x)}$

که $v(x)$ را از معادله خطی زیر بدست می‌آوریم:

$$v' - \left(p(x) + 2u(x)q(x)\right)v = q(x)$$

TANDIS

Subject: ..........
Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

مثال: مطلوب است جواب عمومی: $y_1 = x \to u(x)$ و $y' = x^2\underbrace{(y-x)^2}_{y^2-2xy+x^2} + \frac{y}{x}$

$$y' = x^2y^2 - 2x^3y + x^4 + \frac{y}{x} \to y' = x^2y^2 + \left(-2x^3 + \frac{1}{x}\right)y + x^4$$

$$\to y' \underbrace{- \left(-2x^3 + \frac{1}{x}\right)}_{= 2x^3 - \frac{1}{x} = p(x)} y \underbrace{- x^2}_{q(x)} y^2 = \underbrace{x^4}_{r(x)}$$

جواب عمومی: $y = u + \frac{1}{v} = x + \frac{1}{v}$

که $v$ را از معادله خطی زیر بدست می‌آوریم:

$$v' - \left(p(x) + 2u(x)\,q(x)\right)v = q(x)$$

$$\to v' - \left(2x^3 - \frac{1}{x} + 2x(-x^2)\right)v = -x^2$$

$$\to v' + \frac{1}{x}v = -x^2 \quad \text{خطی}$$

$$\to v = \underbrace{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}_{x^{-1} = \frac{1}{x}} \left\{ \underbrace{\int -x^2 \left(e^{\int \frac{1}{x}dx}\right) dx}_{= -\int x^3 dx = -\frac{x^4}{4}} + c \right\}$$

$e^{\int \frac{1}{x}dx} \to x$

$$v = \frac{1}{x}\left\{-\frac{x^4}{4} + c\right\}$$

جواب: $y = u + \frac{1}{v} = ??$ ✓

تمرین:

② $y' = x^2 + \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ $\qquad y_1 = x^2 \to -x^2$

③ $y' + e^x = e^{-x}y^2 + y$ $\qquad y_1 = e^x$

TANDIS

Subject: ..................
Year: .......... Month: .......... Day: .......... ( )

جواب تمرین: اصلاح شد $y' = x^2 + \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ $\quad y_1 = \underbrace{-x^2}_{u}$

$y = u + \frac{1}{v}$ که $v$ از حل معادله زیر بدست می‌آید: $v' - (p(x) + 2q(x)u(x))v = q(x)$

$$\underbrace{y' - \frac{2}{x}}_{p(x)}y + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{q(x)}y^2 = x^2$$ ریکاتی

$$v' - \left(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \times (-x^2)\right)v = \frac{1}{x^2}$$

$$v' + \left(\frac{2 - 2x}{x}\right)v = \frac{1}{x^2}$$ خطی مرتبه اول

$$v = v(x) = e^{-\int \frac{2-2x}{x}dx}\left(\int \frac{1}{x^2}\, e^{\int \frac{2-2x}{x}dx}\, dx + c\right)$$

$$= -\int \frac{2-2x}{x}dx = -\int\left(\frac{2}{x} - 2\right)dx = -2\ln x + 2x$$

$$e^{-2\ln x + 2x} \qquad = e^{2\ln x - 2x} = e^{2\ln x}\cdot e^{-2x} = x^2 e^{-2x}$$

$$\Rightarrow e^{-2\ln x + x}\left(\int \frac{1}{x^2}\cdot(x^2 e^{-2x})\, dx + c\right)$$

$$= x^{-2}e^{2x}\left\{\int e^{-2x}dx + c\right\} = x^{-2}e^{2x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)$$

جواب عمومی $y = u + \frac{1}{v} = -x^2 + \frac{1}{x^{-2}e^{2x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)}$

TANDIS

Subject: ............ Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

**معادله کلرو:** به شکل کلی $y = xy' + f(y')$ است که با تعویض متغیر ①

$y' = p$ داریم: $y = xp + f(p) \quad (*)$ که با مشتق گیری نسبت به $x$ داریم:

$$\cancel{y'} = \cancel{p} + xp' + p'f'(p)$$

$$\to \quad 0 = (x + f'(p))\,p'$$

یا $p' = 0 \to p = c$ تابع ثابت $\xrightarrow{\text{در } (*) \text{ قرار}}$ $\boxed{y = cx + f(c)}$ جواب عمومی ①

$x + f'(p) = 0 \to x = -f'(p) \xrightarrow[\text{قرار میدهیم}]{\text{در } (*)}$

$$y = -pf'(p) + f(p)$$

از حذف $p$ در دستگاه:

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

رابطه بین $x$ و $y$ تعیین میشود که یک جواب غیرعادی معادله ① است.

**مثال:** معادلات زیر را حل کنید.

① $y = xy' + \sqrt{1+y'^2} \to f(y') \Rightarrow f(t) = \sqrt{1+t^2}$

$$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

یک معادله کلرو با تعویض متغیر $y' = p$:

جواب عمومی: $y = cx + \sqrt{1+c^2}$

برای جواب غیرعادی:
$$\begin{cases} x = -f'(p) = \dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = -pf'(p) + f(p) = -p \cdot \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2} = \dfrac{-p^2+1+p^2}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases} \to p \text{ حذف}$$

$$\to x^2 = \frac{p^2}{1+p^2} \to x^2 + x^2p^2 = p^2$$

$$\to p^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$p = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$$

Subject: ........ Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

تمرین‌ها را دانلود کنیم

$$\to y = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}} = \sqrt{1-x^2}$$

جواب غیرعادی

$p^2$ را در $y$ جایگذاری می‌کنیم:

یک جواب غیرعادی است که از فرم جواب عمومی پیروی نمی‌کند.

یا: $x^2+y^2 = \frac{p^2}{1+p^2} + \frac{1}{1+p^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

(2) $$xy'^3 - yy'^2 + 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } y'^2} xy' - y + \frac{1}{y'^2} = 0$$

$y = xy' + \frac{1}{y'^2} \to$ یک معادله کلرو

$\frac{1}{y'^2} \to f(y') \longrightarrow f(t) = \frac{1}{t^2} = t^{-2}$

$f'(t) = -2t^{-3} = \frac{-2}{t^3}$

جواب عمومی: $y = cx + \frac{1}{c^2}$ ✓

با تعویض متغیر $y'=p$ داریم:

جواب غیرعادی:
$$\begin{cases} x = -f'(p) = -\left(\frac{-2}{p^3}\right) = \frac{2}{p^3} \\ y = -pf'(p) + f(p) = -p\left(\frac{-2}{p^3}\right) + \frac{1}{p^2} = \frac{3}{p^2} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x = \frac{2}{p^3} \\ y = \frac{3}{p^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } p} \begin{cases} x^2 = \frac{4}{p^6} \\ y^3 = \frac{27}{p^6} \end{cases} \to \frac{x^2}{y^3} = \frac{4}{27} \to 27x^2 = 4y^3$$

(3) $$y = 3xy' + 6y^2y'^2$$

کلرو نیست اما با ضرب طرفین در $y^2$ داریم:

ضرب در $y^2$

$$y^3 = x(3y'y^2) + 6y'^2y^4 \longrightarrow \left(\frac{3y'y^2}{3}\right)^2 = \left(\frac{u'}{3}\right)^2 = \frac{u'^2}{9}$$

تغییر متغیر $u = y^3$

$u' = 3y'y^2 \to u = xu' + 6\frac{u'^2}{9} \to u = xu' + \frac{2}{3}u'^2$

$f(u') \Rightarrow f(t) = \frac{2}{3}t^2 \Rightarrow f'(t) = \frac{4}{3}t$

جواب عمومی: $u = cx + \frac{2}{3}c^2 \xrightarrow{u=y^3} \boxed{y^3 = cx + \frac{2}{3}c^2}$ ✓

$$\begin{cases} x = -f'(p) = -\frac{4}{3}p \to x^2 = \frac{16}{9}p^2 \\ u = -pf'(p) + f(p) = -p\left(\frac{4}{3}p\right) + \frac{2}{3}p^2 = -\frac{2}{3}p^2 \end{cases}$$

حذف $p$

$$\to \frac{x^2}{u} = \frac{\frac{16}{9}p^4}{-\frac{2}{3}p^2} \to \frac{x^2}{u} = -\frac{8}{3} \to 3x^2 = -8u \xrightarrow{u=y^3}$$

تمرین: a مقداری ثابت

(۴) $y = xy' + \dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$ حل کنیم برای جلسه بعد

معادله لاگرانژ: به شکل کلی $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ هستند.

در اینجا نیز با تعویض متغیر $y'=p$:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \quad (*)$$

از طرفین (*) مشتق گیری نسبت به $x$ →

$$\underset{p}{y'} = \varphi(p) + xp'\varphi'(p) + p'\psi'(p)$$

$$\to p - \varphi(p) = \left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)p' \quad ①$$

حالت اول: سمت چپ $p - \varphi(p) = 0 \to$ سمت راست $= 0 \to p' = 0$

$p = p_0$ ثابت → در (*) قرار

$$\boxed{y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)}$$

اینکه جواب غیرعادی است یا خیر پس از حل حالت دوم مشخص می‌شود.

یا

حالت دوم: $p - \varphi(p) \neq 0$

طرفین ① بر $p-\varphi(p)$ تقسیم ↓

$$1 = \left(\frac{x\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\right)p' \qquad \frac{dp}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}$$

یک معادله خطی برحسب $\frac{dx}{dp}$ ← حل ← جواب عمومی تعیین

Subject:
Year: Month: Day: ( )

جواب تمرین ۴:

$$y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}} \rightarrow f(y') \Rightarrow f(t) = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\rightarrow f'(t) = \frac{a\sqrt{1+t^2} - \frac{at^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}$$

با تعویض متغیر $y' = p$ داریم:

و داریم: $y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$

جواب عمومی: $y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$

$$\begin{cases} x = \frac{-a}{\sqrt{1+p^2}(1+p^2)} = \frac{-a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ y = \frac{ap^3}{\sqrt{1+p^2}(1+p^2)} = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } p} \boxed{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}}$$

$$(-a)^{\frac{2}{3}} = ((-a)^2)^{\frac{1}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

مثال های معادله لاگرانژ:

$y = x\,\varphi(y') + \psi(y')$

$$y = x + y'^2 + \frac{2}{3}y'^3 \rightarrow \psi(y') \rightarrow \psi(t) = t^2 - \frac{2}{3}t^3 \rightarrow \psi'(t) = 2t - 2t^2$$

$\varphi(y') = 1 \rightarrow \varphi(t) = 1 \rightarrow \varphi'(t) = 0$

$y = x + p^2 - \frac{2}{3}p^3 \quad (*) \leftarrow$ با تعویض متغیر $y' = p$

$$p - \varphi(p) = 0 \rightarrow p - 1 = 0 \rightarrow \boxed{p = 1} \xrightarrow[(*)]{\text{در}} y = x + 1 - \frac{2}{3}$$

$$y = x + \frac{1}{3}$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p\,\varphi(p)}\,x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

$$\frac{dx}{dp} - 0 \times x = \frac{2p - 2p^2}{p - 1} \rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2p(1-p)}{(p-1)} \xrightarrow{\text{تفکیک پذیر}}$$

$$\int dx = \int -2p\,dp \rightarrow x = -p^2 + c$$

TANDIS

$$\begin{cases} x = -p^2 + c \\ y = x + p^2 - \frac{2}{3}p^3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } p} p^2 = c - x \to p = \sqrt{c-x}$$

$$y = x + (c-x) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{c-x}\right)^3$$

$$\to y = c - \frac{2}{3}\left(\sqrt{c-x}\right)^3$$ جواب عمومی:

(2) $y = xy'^2 + y'^2 \to \varphi(y') \to \varphi(t) = t^2 \to \varphi'(t) = 2t$

$\varphi(y') \to \varphi(t) = t^2 \to \varphi'(t) = 2t$

با $y' = p$ داریم:

$$y = xp^2 + p^2 \quad (*)$$

$$p - \varphi(p) = 0 \to p - p^2 = 0 \to p(1-p) = 0 \begin{cases} p = 0 \xrightarrow[(*)]{\text{در}} y = 0 \to ? \\ p = 1 \xrightarrow[(*)]{\text{در}} y = x + 1 \quad ?? \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

خطی

$$\to \frac{dx}{dp} - \frac{2p}{\underbrace{p - p^2}_{p(1-p)}}x = \frac{2p}{p - p^2} \longrightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{2}{1-p}$$

$$x = x(p) = \underbrace{e^{-\int \frac{-2}{1-p}dp}}_{(1-p)^{-2}} \left\{ \int \frac{2}{1-p} e^{\int -\frac{2}{1-p}dp} dp + c \right\}$$

$$\to x = (1-p)^2 \Big\{ \underbrace{\int \overbrace{2(1-p)}^{1-p=t}\, dp}_{-2\frac{(1-p)^2}{2}} + c \Big\} = (1-p)^{-2}\left\{ -(1-p)^2 + c \right\}$$

$$\to x = -1 + c(1-p)^{-2}$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$$\begin{cases} x = -1 + c(1-p)^{-2} \\ y = xp^2 + p^2 = (x+1)p^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } p}$$

لذا از حل دستگاه:

$$\frac{x+1}{c} = (1-p)^{-2} = \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$\to (1-p)^2 = \frac{c}{x+1} \to 1-p = \sqrt{\frac{c}{x+1}}$$

$$\to p = 1 - \sqrt{\frac{c}{x+1}}$$

$$\boxed{y = (x+1)\left(1 - \sqrt{\frac{c}{x+1}}\right)^2}$$

جواب عمومی $(**)$

با توجه به $(**)$ $y=0$ یک جواب غیرعادی است.

$y = x+1$ به ازای $c=0$ این جواب از $(**)$ بدست می‌آید ← یک جواب خصوصی

## فصل ۳:

### معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر:

**تعریف:** یک معادله خطی مرتبه n-ام به شکل کلی زیر است:

مشتق مرتبه n-ام

$$(1) \quad a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

اگر $f \equiv 0$ آن‌گاه معادله (۱) را همگن و در غیر این صورت آن را غیرهمگن می‌نامند.

همچنین در (۱) $a_n(x)$ تابع ثابت صفر نیست.

همچنین مقادیری از $x$ که به ازای آن‌ها $a_n(x) = 0$ را نقاط تکین (منفرد) معادله (۱) می‌نامند.

**الف - معادلات قابل تبدیل به مرتبه اول:** در این بخش دو دسته معادلات قابل تبدیل به مرتبه اول را تشریح می‌کنیم:

← دو مرتبه‌ی مشتق پشت سرهم

۱- معادلات فاقد $y$ به شکل $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$:

$$y^{(n-1)} = p \to y^{(n)} = p'$$

$$\Rightarrow F(x, p, p') = 0 \longrightarrow \text{معادله مرتبه اول} \to \text{حل!}$$

Subject: ...........

Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

فقط مشتق مرتبه اول وردم داریم!

۲- معادلات فاقد $x$ به شکل $G(y, y', y'')=0$:

$y'=u \longrightarrow y''=u'=\frac{du}{dx}$ $\xrightarrow{\text{قاعده زنجیره‌ای}}$

$$\frac{du}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'=u}=u\frac{du}{dy}$$

لذا: $G\left(y, u, u\frac{du}{dy}\right)=0$ ← مرتبه اول برحسب $\frac{du}{dy}$ ← حل!

تذکر: در هر دو حالت قبل، باید حل را تا بدست آمدن رابطه بین $x$ و $y$ ادامه داد.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را تعیین کنید:

① $xy''' + y'' = 0 \longrightarrow$ فاقد $y$ به شکل $F(x, y'', y''')=0$

$y''=p \longrightarrow y'''=p' \longrightarrow xp'+p=0$ مرتبه اول و البته تفکیک پذیر

$x\underbrace{p'}_{\frac{dp}{dx}}=-p \longrightarrow \int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dx}{x} \longrightarrow \ln p=-\ln x+\underbrace{C}_{\ln C_1}$

$\longrightarrow \ln p=\ln\left(\frac{C_1}{x}\right) \longrightarrow p=\frac{C_1}{x} \xrightarrow{p=y''} y''=\frac{C_1}{x}$

$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y''dx=\int\frac{C_1}{x}dx \longrightarrow y'=C_1\ln x+C_2$ $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$

$$y=\int(C_1\ln x+C_2)dx=C_1(x\ln x-x)+C_2x+C_3$$

$\longrightarrow$ جواب عمومی: $y=C_1(x\ln x-x)+C_2x+C_3$

معادله مرتبه ۳ ← سه تا ثابت $C_1$، $C_2$، $C_3$ داریم.

به جای $p$ مقدار آن را جایگذاری می‌کنیم، چون رابطه بین $x$ و $y$ می‌خواهیم اما $p$ برحسب مشتق های $y$ است.

Subject:
Year: Month: Day: ( )

(۲) $(1+x^2)y'' + 2xy' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(1+x^2)p' + 2xp = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\leftarrow F(x,y',y'')=0$ فاقد y به شکل

$\leftarrow y''=p' \leftarrow y'=p$

$\xrightarrow[\text{حذف مرتبه اول}]{\text{تقسیم بر } 1+x^2}$ $p' + \dfrac{2x}{1+x^2}p = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

$-\ln(1+x^2) \leftarrow$

$\rightarrow p = p(x) = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx} \left\{ \int \dfrac{1}{(1+x^2)^2} e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} dx + c_1 \right\}$ $\rightarrow \ln t = \ln(1+x^2)$

$\longrightarrow p = (1+x^2)^{-1} \left\{ \int \dfrac{1}{(1+x^2)^2}(1+x^2)\,dx + c_1 \right\}$

$\rightarrow p = \dfrac{1}{1+x^2}\left\{ \operatorname{Arctan} x + c_1 \right\} = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2} + \dfrac{c_1}{1+x^2}$

$\xrightarrow{p=y'}$ $y' = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2} + \dfrac{c_1}{1+x^2}$ $\xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{انتگرال}}$

$y = \int \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}dx + \int \dfrac{c_1}{1+x^2}dx$

$\dfrac{t^2}{2} \leftarrow$

$\longrightarrow$ جواب عمومی : $y = \dfrac{(\operatorname{Arctan} x)^2}{2} + c_1 \operatorname{Arctan} x + c_2$

?(۳) $y'' = y'(y'+y)$ , $y(0)=0$ , $y'(0)=-1$

$u=y'$ حالت فاقد x : $G(y,y',y'')=0$

$y'' = u\dfrac{du}{dy}$

$u\dfrac{du}{dy} = u(u+y)$

$\xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{حذف } u}$ $\dfrac{du}{dy} = u+y \rightarrow \dfrac{du}{dy} - u = y$ حذف مرتبه اول برحسب $\dfrac{du}{dy}$

TANDIS

Subject: ..................
Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

$$\rightarrow u = u(y) = e^{-\int - dy} \left\{ \int y \frac{e^{\int - dy}}{e^{-y}} dy + c_1 \right\}$$

$$\int y e^{-y} dy \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} -y e^{-y} - e^{-y}$$

$$\rightarrow u = e^{y} \left\{ -y e^{-y} - e^{-y} + c_1 \right\} \rightarrow u = -y - 1 + c_1 e^{y}$$

$$\xrightarrow{u = y'} \underbrace{y'}_{dy/dx} = -y - 1 + c_1 e^{y} \longrightarrow$$ مرتبه اول - تفکیک پذیر

از فرض $\rightarrow y(0) = 0 \; , \; y'(0) = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -1 = -(0) - 1 + c_1 e^{0} \rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{-y-1} = \int dx \rightarrow -\int \frac{dy}{y+1} = x + c$$

$$-\ln(y+1) = x + c \xrightarrow[y(0)=0]{\text{از فرض}} -\ln(0+1) = c + 0 \rightarrow c = 0$$

$\rightarrow \boxed{-\ln(y+1) = x}$ یا $\boxed{y + 1 = e^{-x}}$ جواب

بعضی از معادلات به هر ۲ روش فاقد $x$ و فاقد $y$ حل می‌شوند. (معمولاً فاقد $y$ راحت‌تره)

? (۱۴) $y y' y'' + y'^2 - y'^4 \ln y = 0$ همه جملات $y'$ دارند

$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } y'} y y'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0$ حالت فاقد $x$

$G(y, \underbrace{y'}_{u}, y'') \qquad u = y' \qquad y'' = u \dfrac{du}{dy} \longrightarrow$ در معادله قرار می‌دهیم

$$y u \frac{du}{dy} + u^2 - u^3 \ln y = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } u} y \frac{du}{dy} + u - u^2 \ln y = 0$$

$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } y} \dfrac{du}{dy} + \underbrace{\dfrac{1}{y}}_{p(y)} u = \underbrace{\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)}_{q(y)} u^{2 \to n}$ . $n = 2$ ، برنولی برحسب $\dfrac{du}{dy}$

Subject: ..................

Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

: $v = u^{1-n} = u^{-1}$ با تعویض متغیر

$$\frac{dv}{dy} + (1-n)\,p(y)\,v = (1-n)\,q(y)$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dy} - \frac{1}{y}v = -\frac{\ln y}{y}$$ خطی

$$e^{-\int -\frac{1}{y}dy} \rightarrow y \qquad \int -\frac{1}{y}dy \rightarrow y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$v = v(y) = e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left\{\int -\frac{\ln y}{y}\, e^{\int -\frac{1}{y}dy}\, dy + c\right\}$$

$$= y\left\{-\underbrace{\int \frac{\ln y}{y^2}\,dy}_{\text{جزء به جزء}} + c\right\} = y\left\{\frac{\ln y}{y} + \frac{1}{y} + c\right\}$$

$$\ln y = u_1 \rightarrow du_1 = \frac{1}{y}dy \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dv_1 \rightarrow v_1 = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$$

$$= -\frac{\ln y}{y} - \int -\frac{1}{y^2}dy = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow v = \ln y + 1 + c_1 y \xrightarrow{v = u^{-1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{y'}} \frac{1}{y'} = \ln y + 1 + c_1 y \qquad \left(y' \rightarrow \frac{dx}{dy}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} \int dx = \int (\ln y + 1 + c_1 y)\,dy$$

$$\rightarrow x = (y\ln y - y) + y + c_1\frac{y^2}{2} + c_2 \checkmark$$

TANDIS

**ب) معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:**

به شکل کلی $ay''+by'+cy=0$ (1) است که $a$ و $b$ و $c$ ضرایب ثابتی اند.

پیش بینی می‌شود $y=e^{\lambda x}$ جوابی از (1) باشد. لذا با جاگذاری در (1) داریم:

$$a\lambda^2 e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+c e^{\lambda x}=0$$

$$\longrightarrow e^{\lambda x}(a\lambda^2+b\lambda+c)=0 \longrightarrow \boxed{a\lambda^2+b\lambda+c=0}\ (2)$$

معادله مشخصه مربوط به (1) نام دارد.

بنابراین حالت های زیر را داریم:

1- $\Delta>0$ $\quad(\Delta=b^2-4ac)$ معادله (2) دو ریشه متمایز $\lambda_1\neq\lambda_2$ دارد.

$$y_1=e^{\lambda_1 x} \text{ و } y_2=e^{\lambda_2 x} \longrightarrow \text{جواب عمومی}: y(x)=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$

2- $\Delta=0$ معادله (2) ریشه مضاعف $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ دارد.

$$y_1=e^{\lambda_1 x} \qquad y_2=xe^{\lambda_1 x} \longrightarrow \text{جواب عمومی}: y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2xe^{\lambda_1 x}$$

3- $\Delta<0$ معادله (2) دو ریشه مختلط $\lambda=\alpha\pm i\beta$ دارد.

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$\text{جواب عمومی}: y(x)=c_1y_1+c_2y_2=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

Subject: ..................
Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

① $y'' + 2y' - 15y = 0$

ابتدا معادله مشخصه را تعیین می‌کنیم.

$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \rightarrow (\lambda+5)(\lambda-3) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} y_1 = e^{-5x} \\ y_2 = e^{3x} \end{array}$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$= c_1 e^{-5x} + c_2 e^{3x}$

② $9y'' + 6y' + 1 = 0$ معادله مشخصه: $9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$

$\rightarrow (3\lambda+1)^2 = 0 \rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{3}$

$\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{1}{3}x} \\ y_2 = x e^{-\frac{1}{3}x} \end{cases}$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{-\frac{1}{3}} + c_3 x e^{-\frac{1}{3}}$

$7y^{(5)} \rightarrow 7\lambda^5$ برای نوشتن معادله مشخصه توان $\lambda$ را از بزرگترین مرتبه مشتق شروع می‌کنیم. مثلاً

③ $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

$= \underbrace{-1}_{\alpha} \pm \underbrace{2}_{\beta} i$

$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x = e^{-x} \cos 2x$

$y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x = e^{-x} \sin 2x$

جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

TANDIS

## ج- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه $n$ :

به شکل $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ (1) هستند.

در قضایای زیر توابع $a_i(x)$ و $f(x)$ روی یک بازه $[a,b]$ پیوسته اند.

**قضیه ۱:** اگر $x_0 \in [a,b]$ و $z_0$ ، $z_1$ ، ... ، $z_{n-1}$ نیز اعداد ثابت دلخواهی باشند، آن گاه معادله (1) به همراه شرایط اولیه:

$$y(x_0)=z_0,\quad y'(x_0)=z_1,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=z_{n-1}$$

دارای جواب یکتایی است که در سرتاسر بازه $[a,b]$ تعریف شده است.

**قضیه ۲:** اگر $y_p(x)$ یک جواب خصوصی معادله (1)، و $y_g(x)$ نیز جواب عمومی معادله همگن $a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ (2) باشد. آن گاه جواب عمومی (1) به صورت زیر است:

$$y(x)=y_g(x)+y_p(x)$$

**قضیه ۳:** اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ ، ... ، $y_n(x)$ جواب‌هایی از (2) باشند آن گاه:

$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ نیز جوابی از (2) است. که $c_i$ ها ثابت های دلخواهی اند.

**تعریف (رونسکین):** رونسکین توابع $y_1$ و $y_2$ و ... و $y_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

مثال: رونسکین دو تابع $y_1(x)=e^{5x}$ و $y_2(x)=4e^{-7x}$ را بیابید.

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{5x} & 4e^{-7x}\\ 5e^{5x} & -28e^{-7x}\end{vmatrix}$$

$$= -28e^{-2x} - 20e^{-2x} = -48e^{-2x}$$

قضیه ۴:

توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ روی بازه $[a,b]$ مستقل خطی اند $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in[a,b]: W(y_1,y_2,\dots,y_n)\neq 0$

وابسته خطی اند $\Longleftrightarrow$ $W(\quad)=0$

قضیه ۵: اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$ جواب های مستقل خطی همگن (۲) باشند

آن گاه:

جواب عمومی (۲): $y(x)=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n$

که $c_i$ ها ثابت های دلخواهی اند.

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ معادله غیرهمگن

قضیه ۶: اگر $y_p(x)$ یک جواب معادله غیرهمگن

و $\tilde{y}_p(x)$ یک جواب معادله غیرهمگن $y''+p(x)y'+q(x)y=\tilde{f}(x)$ باشد آن گاه:

$y_p(x)+\tilde{y}_p(x)$ یک جواب برای معادله زیر است:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)+\tilde{f}(x)$$

Subject: Year: Month: Day:



## معادلات خطی همگن از مرتبه $n$ با ضرایب ثابت:

به شکل $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ ① است که $a_i$ ها ضرایب ثابتی اند.

مشابه مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت عمل می‌کنیم یعنی با تشکیل معادله مشخصه به شکل زیر: $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ و محاسبه ریشه های آن، جواب $n$ تا مستقل خطی $y_1, y_2, \dots, y_n$ را بدست می‌آوریم.

که در پایان جواب عمومی ① برابر است با:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

که $c_i$ ها ضرایب ثابت دلخواهی اند.

**مثال:** جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

① $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$   مرتبه ۳ ← ۳ تا جواب مستقل خطی $y_1$ و $y_2$ و $y_3$ دارد.

معادله مشخصه: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$   درجه ۳ ← ۳ تا ریشه دارد.

مجموع ضرایب $= 0$ $\xrightarrow[\text{یعنی مجموع ضرایب}]{\lambda = 1}$ پس: $\underset{\text{یک ریشه}}{\boxed{\lambda = 1}} \to \lambda - 1$ یک عامل

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 & \lambda - 1 \\ \hline -\lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda - 6 \\ -\lambda^2 - 5\lambda + 6 & \\ +\lambda^2 - \lambda & \\ -6\lambda + 6 & \\ 6\lambda - 6 & \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$

$\lambda - 1 = 0 \to \lambda = 1 \to y_1 = e^x$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \to (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

$\to \lambda = 3$ و $\lambda = -2$

$\to y_2 = e^{3x}$ و $y_3 = e^{-2x}$

$\to$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$ ✓

② $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

معادله مشخصه: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0$ ۳ تا ریشه

$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$\rightarrow \begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = xe^x \\ y_3 = x^2 e^x \end{cases}$ $\rightarrow$ جواب عمومی: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$

$= c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

مثل همه بجای $y$ ها $\lambda$ بنویسیم.

③ $y^{(4)} - y = 0 \rightarrow$ معادله مشخصه: $\lambda^4 - 1 = 0$

$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1 \\ \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = -1 \rightarrow \lambda = \pm i \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\lambda = \alpha \pm \beta i \rightarrow$ جواب: $e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

جواب عمومی: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \underbrace{e^{0x}}_{1}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$ ✓

با ضرایب ثابت

معادلات خطی مرتبه n غیرهمگن:

به شکل ① $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ هستند.

می‌دانیم جواب عمومی ① به شکل $y(x) = y_g(x) + y_p(x)$ است که

$y_g$ جواب $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ است که در قسمت قبل روش

بدست آوردن آن تشریح شده و $y_p$ نیز یک جواب خصوصی از ① است.

در این فصل، دو روش برای تعیین $y_p(x)$ بیان می‌کنیم:

۱- روش ضرایب نامعین ۲- روش تغییر پارامترها

۱- روش ضرایب نامعین:

۱- روش ضرایب نامعین: اگر $f(x)$ به یکی از اشکال زیر باشد:

① اگر $f(x)=k_nx^n+\dots+k_1x+k_0$ یک چندجمله‌ای درجه $n$

$y_p = x^r(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\dots+A_1x+A_0)$ , $r=$ تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه

② $f(x)=ke^{\alpha x} \longrightarrow y_p(x)=x^r(Ae^{\alpha x})$ , $r=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha$ در معادله مشخصه

③ $f(x)=k_1\cos\beta x+k_2\sin\beta x \longrightarrow y_p(x)=x^r(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)$

و $r=$ تعداد تکرار ریشه $\beta i$ در معادله مشخصه

④ $f(x)=(k_nx^n+\dots+k_1x+k_0)e^{\alpha x}$

نمایی بر چندجمله‌ای غلبه می‌کند

$y_p(x)=x^r(A_nx^n+\dots+A_1x+A_0)e^{\alpha x}$ , $r=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha$ در معادله مشخصه

⑤ $f(x)=(k_mx^m+\dots+k_1x+k_0)\cos\beta x+(l_nx^n+\dots+l_1x+l_0)\sin\beta x$

$y_p(x)=x^r\{(A_sx^s+\dots+A_1x+A_0)\cos\beta x+(B_sx^s+\dots+B_1x+B_0)\sin\beta x\}$

$S=\max\{m,n\}$ و $r=$ تعداد تکرار ریشه $\beta i$ در معادله مشخصه

⑥ $f(x)=e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x+k_2\sin\beta x)$

$y_p(x)=x^re^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)$

$r=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha+\beta i$ در معادله مشخصه

Subject:
Year : Month : Day : (۵)
page : ( )

۷ برای هر عبارت ... جواب خصوصی $y_p(x) =$ → مجموعی از حالات بالا
مربوطه به آن را می‌نویسیم (طبق اصل برهمنهی)

تذکر: ضرایب نامعین $A$ و $A_i$ ها و $B_i$ ها با جایگذاری $y_p$ در ① بدست می‌آیند.

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

① $y'' - y' = \boxed{3x + 5} \rightarrow f(x) =$ یک چندجمله‌ای درجه ۱

حالت ①: $y_p(x) = x^r (A_1 x + A_0)$ $r$: تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه

معادله مشخصه: $\lambda^2 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \rightarrow r = 1$

برای تعیین $A_i$ ها، $y_p$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} y_p' &= 2A_1 x + A_0 \\ y_p'' &= 2A_1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در معادله}} 2A_1 - 2A_1 x - A_0 = 3x + 5$$

$$\rightarrow (-2A_1)x + (2A_1 - A_0) = 3x + 5$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2A_1 = 3 & \rightarrow \boxed{A_1 = -3/2} \\ 2A_1 - A_0 = 5 & \rightarrow \boxed{A_0 = -8} \end{cases}$$

$$\rightarrow y_p(x) = -\frac{3}{2} x^2 - 8x$$

→ جواب عمومی: $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 e^x - \frac{3}{2} x^2 - 8x$ ✓

تمرین :

② $y''' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$

③ $y'' - 4y' + 3y = 5e^{2x} \to f(x)$ حالت ② $y_p(x) = x^r A e^{2x}$

r : تعداد تکرار ریشه $\alpha = 2$ در معادله مشخصه ← $r = 0$

معادله مشخصه : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 1 \to y_g = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$

برای تعیین A، $y_p$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$y_p' = 2Ae^{2x}$

$y_p'' = 4Ae^{2x}$

جایگذاری در معادله $\to 4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 5e^{2x}$

$\to -Ae^{2x} = 5e^{2x} \to -A = 5 \to A = -5 \to y_p = -5e^{2x}$

جواب عمومی : $y(x) = y_p + y_g = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} - 5e^{2x}$

تمرین :

④ $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{1}{2}x}$ ?

اگر یکی از sin یا cos در $f(x)$ نبود ضریب آن را صفر می‌ذاریم.

⑤ $y'' + 9y = \boxed{\sin 3x - \cos 3x} \to f(x)$ حالت ③

$y_p = x^r (A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x)$ r : تعداد تکرار ریشه $\beta i = 3i$ در معادله مشخصه

$= x(A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x) \to r = 1$

$y_g(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

معادله مشخصه : $\lambda^2 + 9 = 0 \to \lambda^2 = -9 \to \lambda = \pm 3i$

برای تعیین $A_1$ و $A_2$، $y_p$ را در معادله قرار می‌دهیم.

$y_p' = A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x + x(3A_1 \cos 3x - 3A_2 \sin 3x)$

$$y_p'' = 3A_1\cos 3x - 3A_2\sin 3x + 3A_1\cos 3x - 3A_2\sin 3x + x(-9A_1\sin 3x - 9A_2\cos 3x)$$

در معادله قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow 6A_1\cos 3x - 6A_2\sin 3x - 9A_1 x\sin 3x - 9A_2 x\cos 3x + 9A_1 x\sin 3x + 9A_2 x\cos 3x = \sin 3x - \cos 3x$$

$$\to 6A_1\cos 3x - 6A_2\sin 3x = \sin 3x - \cos 3x$$

$$\begin{cases} 6A_1 = -1 \to A_1 = -\frac{1}{6} \\ -6A_2 = 1 \to A_2 = -\frac{1}{6} \end{cases} \to y_p(x) = x\left(-\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{6}\cos 3x\right)$$

(۶) $y'' + 4y' + 3y = 2\cos 2x$ تمرین

مثال: برای هریک از معادلات زیر فرم کلی جواب خصوصی بدون محاسبه ضرایب ارائه کنید:

(۱) $y'' + y' - 6y = 4e^{2x} + 7x^2$

حالت $f_1(x)$ — $f_2(x)$ حالت ۱

$y_{p_1} = x^{r_1} A e^{2x}$ — $y_{p_2}(x) = x^{r_2}(B_2x^2 + B_1x + B_0)$

$r_1 =$ تعداد تکرار ریشه $\alpha = 2$ در معادله مشخصه $= 1$ — $r_2 =$ تعداد تکرار ریشه صفر در معادله مشخصه $= 0$

معادله مشخصه: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \to (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$ ، $\lambda_1 = -3$ ، $\lambda_2 = 2$

خصوصی کلی: $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = xAe^{2x} + B_2x^2 + B_1x + B_0$

(۲) $\boxed{D^2(D^2+1)^2(D^2-9D)y} = x^2 + 2\underbrace{\sinh(x)}_{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} + x^3e^{3x} + 1 + x\cos x\,\cos^2 x$ ، $\cos^2 x \to \frac{1+\cos 2x}{2}$

نکته: $D = \frac{d}{dx}$ مشتق اول — $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ مشتق دوم

$y''(y^{(4)}+2y''+y)(y'''-9y')$ : یعنی

(فقط برای اینکه بدانیم نیازی نیست معادله را باز کنیم و به این شکل بنویسیم)

$$x\cos x\cos^2 x = x\cos x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}x\cos x\cos 2x$$

$$\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)$$

$$\cos p\cos q = \frac{1}{2}\left(\cos(p+q)+\cos(p-q)\right)$$

$$= \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{4}x\cos 3x + \frac{1}{4}x\cos x$$

$$= \frac{3}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x\cos 3x$$

پس: $f(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{f_1} + \underbrace{e^x}_{f_2} - \underbrace{e^{-x}}_{f_3} + \underbrace{x^3e^{3x}}_{f_4} + \underbrace{\frac{3}{4}x\cos x}_{f_5} + \underbrace{\frac{1}{4}x\cos 3x}_{f_6}$

جواب خصوصی: $y_{p_1}$ $y_{p_2}$ $y_{p_3}$ $y_{p_4}$ $y_{p_5}$ $y_{p_6}$

جواب خصوصی کلی: $y_p(x) = y_{p_1} + \cdots + y_{p_6}$

$$y_{p_1} = x^{r_1 \to 3}(A_2x^2+A_1x+A_0) = x^3(A_2x^2+A_1x+A_0)$$

$$y_{p_2} = x^{r_2 \to 0}Be^x = Be^x$$

$$y_{p_3} = x^{r_3 \to 0}Ce^{-x} = Ce^{-x}$$

$$y_{p_4} = x^{r_4 \to 1}(D_3x^3+D_2x^2+D_1x+D_0)e^{3x} = x(D_3 \cdots)e^{3x}$$

$$y_{p_5} = x^{r_5 \to 2}\{(E_1x+E_0)\cos x + (F_1x+F_0)\sin x\} = x^2\{\ \}$$

$$y_{p_6} = x^{r_6 \to 0}\{(G_1x+G_0)\cos 3x + (H_1x+H_0)\sin 3x\} = \{\ \}$$

Soroush

معادله مشخصه : $\lambda^2(\lambda^2+1)^2(\lambda^3-9\lambda)=0$

$\lambda^2=0 \rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$

$\lambda^2+1=0 \rightarrow \lambda=\pm i$ مضاعف ← (با تکرار دو) $\lambda=0$

$\lambda^3-9\lambda=0 \rightarrow \lambda(\lambda^2-9)=0 \rightsquigarrow \lambda=\pm 3$

روش کاهش مرتبه: برای یافتن یک جواب مانند $y_2(x)$ با معلوم بودن جواب $y_1(x)$ از معادله همگن ① $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ به طوری که $y_1$ و $y_2$ مستقل خطی باشند استفاده می‌شود.

برای این کار فرض می‌کنیم $y_2(x)=y_1(x)\,v(x)$ که برای یافتن $v(x)$، با جایگذاری $y_2$ در ① بدست می‌آید:

$$y_1 v''+(2y_1'+p(x)y_1)v'=0$$

که با $w=v'$ داریم:

$$y_1 w'+(2y_1'+p(x)y_1)w=0 \rightarrow$$ مرتبه اول تفکیک پذیر

$$\rightarrow \int \underbrace{\frac{w'}{w}dx}_{\frac{dw}{w}} = -\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p(x)\right)dx$$

$$\rightarrow \ln w = -2\ln y_1 - \int p(x)\,dx$$

$$\rightarrow w = e^{-2\ln y_1-\int p(x)dx} = y_1^{-2}e^{-\int p(x)dx} \xrightarrow{w=v'}$$

$$v=\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2(x)=y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\,dx}$$ فرمول آبل

مثال: اگر $y_1 = x$ یک جواب معادله $x^2y'' - xy' + y = 0$ باشد جواب عمومی معادله را بدست آورید.

جواب عمومی $y(x) : c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow$ با فرمول آبل

$$e^{\ln x} = x$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر } x^2]{\text{طرفین معادله}} y'' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{p(x)} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{1}{x}\,dx} dx$$

$$= x \int \frac{1}{x^2} \cdot x \, dx = x \ln x$$

جواب عمومی: $y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x$

مثال: ابتدا نشان دهید $y_1 = \sin(x^2)$ یک جواب برای معادله $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ است و سپس جواب عمومی معادله را تعیین کنید.

مثال: اگر $y_1 = e^{mx}$ جوابی از معادله $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ باشد جواب عمومی معادله را بدست آورید.

حل: مرحله اول: تعیین $m$ : چون $y_1$ جوابی از معادله است پس در معادله صدق می‌کند

$$y_1' = me^{mx} \qquad y_1'' = m^2 e^{mx}$$

$$xm^2 e^{mx} - 2(x+1) m e^{mx} + (x+2) e^{mx} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بر } e^{mx} \text{ تقسیم}} m^2 x - 2mx - 2m + x + 2 = 0$$

$$\rightarrow (m^2 - 2m + 1)x + (-2m + 2) = 0 \xrightarrow{\text{یعنی}} 0x + 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m-1)^2 = 0 \rightarrow m = 1 \\ -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

$y_1 = e^x \Leftarrow (m=1)$ های مشترک قابل قبول اند لذا $m$

مرحله دوم: تعیین $y_2$: از فرمول آبل (روش کاهش مرتبه)

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx} \, dx \qquad p(x) = \frac{-2(x+1)}{x}$$

$$= e^x \int \frac{1}{(e^x)^2} e^{-\int -\frac{2(x+1)}{x}\,dx} \, dx$$

$$*: \int \frac{2x+2}{x}\,dx = \int 2 + \frac{2}{x}\,dx = 2x + 2\ln x$$

$$\to y_2 = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{2x + 2\ln x} \to e^{2x} x^2$$

$$= e^x \int x^2\,dx = \frac{1}{3} x^3 e^x$$ → جواب عمومی: $c_1 y_1 + c_2 y_2$

روش تغییر پارامترها: با این روش می‌توان یک جواب خصوصی $y_p(x)$ برای معادله غیرهمگن ① $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ یافت.

فرض کنیم: $y_p(x) = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x)$ که با جایگذاری در ① ، $v_1$ و $v_2$ از روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2\, f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx$$ → رونسکین

(جزئیات در ص ۱۴۴-۱۴۵ کتاب)

$$v_2(x) = \int \frac{y_1\, f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx$$ → رونسکین

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

① $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x} \to f(x)$  جواب عمومی: $y(x)=y_g(x)+y_p(x)$

گام اول: یافتن $y_1$ و $y_2$ (یا $y_g$)

سمت چپ مرتبه دوم با ضرایب ثابت  $\underbrace{\lambda^2-2\lambda+1=0}_{\text{معادله مشخصه}} \to (\lambda-1)^2=0 \to \lambda_1=\lambda_2=1$

$$\to \begin{cases} y_1=e^x \\ y_2=xe^x \end{cases} \to y_g(x)=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^x+c_2xe^x$$

گام دوم: یافتن $y_p$ : $y_p(x) \underset{\text{تغییر پارامترها}}{\overset{\text{با روش}}{=}} v_1y_1+v_2y_2$

که:

$$v_1=\int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int \frac{-xe^x\cdot\frac{e^x}{x}}{e^{2x}}dx=-\int dx=-x$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x \end{vmatrix}=e^{2x}$$

$$v_2=\int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int \frac{e^x\cdot\frac{e^x}{x}}{e^{2x}}dx=\int \frac{dx}{x}=\ln x$$

$$\Rightarrow y_p(x)=v_1y_1+v_2y_2=(-x)e^x+(\ln x)(xe^x)$$

جواب عمومی $y(x)=y_g(x)+y_p(x)=c_1e^x+c_2xe^x-xe^x+xe^x\ln x$

تمرین: ② $y''-3y'+2y=\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$

③ $(x^2+1)y''-2xy'+2y=6(x^2+1)^2$

که $y_1=x$ یک جواب معادله همگن است.

$(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$

گام اول: یافتن $y_2$ : $y_2 \underset{\text{کاهش مرتبه}}{\overset{\text{با روش}}{=}} y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx$ ، $P(x)=\frac{-2x}{x^2+1}$

$\ln(x^2+1)$

$$= x\int \frac{1}{x^2}\, e^{-\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}\, dx = x\int \frac{1}{x^2}(x^2+1)\, dx$$

$x^2+1$

$$= x\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = x\left(x-\frac{1}{x}\right) = x^2-1$$

لذا: $y_g(x) = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2(x^2-1)$

گام دوم: $y_p(x)$: $\quad y_p(x) = v_1y_1 + v_2y_2$

$$\frac{4(x^2+1)^2}{x^2+1} = 4(x^2+1)$$

$$v_1 = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}dx = -\int \frac{(x^2-1)\times 4\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}dx$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2+1 \qquad = -4\int x^2-1\, dx = -4\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \int \frac{x\times 4\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}dx = 2x^2$$

$$\Rightarrow y_p(x) = v_1y_1 + v_2y_2 = \left(-4\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right)x + (2x^2)(x^2-1)$$

جواب عمومی: $y(x) = y_g + y_p = ?$

(4) $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = e^x$

تمرین

که $y_1 = e^x$ یک جواب معادله همگن نظیر است

**معادلات کشی اویلر:** شکل ساده آن به صورت زیر است:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

$x>0$ که $a_i$ ها ضرایب ثابت اند. معادله (1) با تعویض متغیر
$x=e^t$ (یا $t=\ln x$) قابل تبدیل به یک معادله با ضرایب ثابت است.
که با حل آن آشناییم. به صورت زیر:

$$y' = \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{قاعده زنجیره‌ای}} \frac{dy}{dt}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\to \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\text{فرض } \bar{y}'(t)} = \frac{1}{x}\bar{y}'(t)$$

$$y' = \frac{1}{x}\bar{y}'(t) \longrightarrow \boxed{xy' = \bar{y}'(t)} \quad (2)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\bar{y}'(t)\right) = \frac{-1}{x^2}\bar{y}'(t) + \frac{d}{dx}(\bar{y}'(t))\times\frac{1}{x}$$

مشتق زنجیره‌ای $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}(\bar{y}'(t)) \times \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\bar{y}''(t)$

$$= \frac{-1}{x^2}\bar{y}'(t) + \frac{1}{x^2}\bar{y}''(t)$$

$$\boxed{x^2 y'' = \bar{y}''(t) - \bar{y}'(t)} \quad (3)$$

و به طور مشابه:

$$x^3 y''' = \bar{y}'''(t) - 3\bar{y}''(t) + 2\bar{y}'(t) \quad (4)$$

و به همین ترتیب الی آخر.

با جایگذاری (2)، (3)، (4) و ... در (1)، به یک معادله خطی با ضرایب ثابت برحسب متغیر مستقل $t$ و تابع مجهول $\bar{y}(t)$ می‌رسیم که قابل حل است.

**نکته:** شکل کلی معادله کشی ـ اویلر به صورت زیر است:

$$a_n(\underbrace{ax+b}_{e^t})^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1(ax+b)y' + a_0 y = f(x) \quad (*)$$

که $a$، $b$، $a_i$ ها همگی ثابت اند.

مشابه حالت قبل، با تعویض متغیر $ax+b=e^t$ (یا $t=\ln(ax+b)$) خواهیم داشت:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\bar{y}'(t)}\cdot\overbrace{\frac{dt}{dx}}^{\frac{a}{ax+b}}=\frac{a}{ax+b}\,\bar{y}'(t)$$

$$\rightarrow (ax+b)y'=a\,\bar{y}'(t)$$

به طور مشابه:

$$(ax+b)^2y''=a^2\,\bar{y}'(t)$$

والی آخر. که با جایگذاری در * به یک معادله خطی با ضرایب ثابت می‌رسیم.

مثال: مطلوب است جواب عمومی معادله زیر:

$$x^2y''+3xy'+2y=x^2+x$$

یک معادله کشی-اویلر ← با تعویض متغیر $x=e^t$ (یا $t=\ln x$) داریم: (فقط باید در امتحان بنویسیم)

$$xy'=\bar{y}'(t)\ ,\ x^2y''=\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)\ \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در معادله}}$$

$$\left(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)\right)+3\bar{y}'(t)+2\bar{y}(t)=(e^t)^2+e^t$$

$$\rightarrow \bar{y}''(t)+2\bar{y}'(t)+2\bar{y}(t)=e^{2t}+e^t$$ مرتبه دوم با ضرایب ثابت (*)

$$\bar{y}(t)=\bar{y}_g(t)+\bar{y}_p(t)$$

گام اول: $\bar{y}_2(t)\ ,\ \bar{y}_1(t)$ : $\lambda^2+2\lambda+2=0 \rightarrow \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$

$$\rightarrow \alpha=-1\ ,\ \beta=1 \quad \begin{cases}\bar{y}_1(t)=e^{-t}\cos t\\ \bar{y}_2(t)=e^{-t}\sin t\end{cases}$$

جواب عمومی (*): $\bar{y}_g(t)=e^{-t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$

page: ( ) Subject: Year: Month: Day: ( )

گام دوم: $\bar{y}_p(t)$: راه اول ①: چون $\bar{f}(t) = e^{2t} + e^{t} \rightarrow$ با روش ضرایب نامعین $\bar{y}_p(t)$ تعیین

② راه دوم: با روش تغییر پارامترها: $\bar{y}_p(t) = \bar{v}_1 \bar{y}_1 + \bar{v}_2 \bar{y}_2$

$$\bar{v}_1(t) = \int \frac{-\bar{y}_2 \bar{f}(t)}{W(\bar{y}_1, \bar{y}_2)} dt = ?? \quad \int \frac{-e^{-t}\sin t}{e^{-2t}} (e^{2t} + e^{t})\, dt$$

$$W(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \rightarrow e^{-2t}$$

$$\bar{v}_2(t) = \int \frac{\bar{y}_1 \bar{f}(t)}{W(\bar{y}_1, \bar{y}_2)} dt = ??$$

$$\rightarrow v_1 = -\int e^{3t} \sin t\, dt - \int e^{2t} \sin t\, dt$$

لذا در پایان:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_g + \bar{y}_p = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{1}{10} e^{2t} + \frac{1}{5} e^{t}$$

$$\frac{t = \ln x}{e^{t} = x} \quad x^{-1}\left(c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)\right) + \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{5} x = y(x)$$ ✓ جواب عمومی

$\alpha = 2$ در معادله مشخصه = تعداد تکرار ریشه $= 0$ ، $\alpha = 1$ تعداد تکرار $= 0$

ادامه روش اول ①: $\bar{y}_p(t) = x^{r_1} A e^{2t} + x^{r_2} B e^{t} = A e^{2t} + B e^{t}$

$$\xrightarrow[\text{قرار میدهیم}]{\text{در } *} \quad A = \frac{1}{10} \qquad B = \frac{1}{5}$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\{a \sin bx - b \cos bx\}$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\{a \cos bx + b \sin bx\}$$

② $\frac{1}{16}\underbrace{(4x+1)^2}_{an+b}y'' + (4x+1)y' - 4y = \frac{\ln(4x+1)}{4x+1}$

ضمن an+b

حالت کلی معادله کشی - اویلر ← با تعویض متغیر $4x+1=e^t$ یا $t=\ln(4x+1)$

داریم:

$$\begin{cases}(4x+1)y' = a\bar{y}'(t) = 4\bar{y}'(t)\\ (4x+1)^2y'' = a^2(\bar{y}''(t)-\bar{y}'(t)) = 16(\bar{y}''-\bar{y}')\end{cases} \xrightarrow{\text{در معادله قرار می‌دهیم}}$$

$$\frac{1}{16}\left(16(y''-y')\right) + 4y' - 4\bar{y} = \frac{\ln(e^t)}{e^t}$$

$$\rightarrow \bar{y}''(t) + 3\bar{y}'(t) - 4\bar{y}(t) = \frac{t}{e^t} \rightarrow te^{-t}$$

$$\rightarrow \bar{y}(t) = \bar{y}_g(t) + \bar{y}_p(t)$$

گام اول: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow (\lambda+4)(\lambda-1)=0 \rightarrow \lambda_1=-4 , \lambda_2=1$

$$\begin{cases}\bar{y}_1 = e^{-4t}\\ \bar{y}_2 = e^t\end{cases} \rightarrow \bar{y}_g = c_1e^{-4t} + c_2e^t$$

روش اول: ضرایب نامعین: $\bar{f}(t) = te^{-t}$

گام دوم: $\bar{y}_p(t)$ / $\bar{y}_p(t) = t^{0}(A_1t+A_0)e^{-t} = (A_1t+A_0)e^{-t}$

روش دوم: تغییر پارامترها: $\bar{y}_p(t) = \bar{v}_1\bar{y}_1 + \bar{v}_2\bar{y}_2$

$$\bar{v}_1(t) = \int \frac{-\bar{y}_2\bar{f}(t)}{W(\bar{y}_1,\bar{y}_2)}dt = \int \frac{-e^t(te^{-t})}{5e^{-3t}}dt$$

$$\rightarrow \bar{v}_1 = \frac{-1}{5}\underbrace{\int te^{3t}dt}_{\text{جزء به جزء}} = \frac{-1}{5}\left(\frac{1}{3}te^{3t} - \frac{1}{9}e^{3t}\right)$$

$$\bar{v}_2 = \int \frac{\bar{y}_1\bar{f}(t)}{W(\bar{y}_1,\bar{y}_2)}dt = \int \frac{e^{-4t}te^{-t}}{5e^{-3t}}dt = \frac{1}{5}\int te^{-2t}dt$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)$$

$(e^t)^3 \quad (4x+1)^3$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \bar{y}_p + \bar{y}_g = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{t} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} t e^{3t} - \frac{1}{9} e^{3t}\right)$$

$$+ \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}\right) \xrightarrow[e^t = 4x+1]{t = \ln(4x+1)} \cdots = y(x) \checkmark$$

تمرین $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2 - x} \longrightarrow$ طرفین $\times x^2$
اویلر می شود

(۳) $x^2 y'' + x y' - y = 0$



Scanned by CamScanner

# فصل ۴ تبدیلات لاپلاس



**تعریف:** فرض کنید تابع $f(t)$ روی بازه‌ی $[0,+\infty)$ تعریف شده باشد و $s$ نیز یک متغیر باشد در این صورت $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ را در صورت تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامند و معمولاً با $\mathcal{L}\{f(t)\}$ و یا $F(s)$ نمایش می‌دهند.

دامنه‌ی تابع $F(s)$ نیز مجموعه همه مقادیری از $s$ که به ازای آن‌ها انتگرال (1) همگرا باشد

**مثال:** تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

(1) $f(t)=1$

$$\mathcal{L}\{f(t)=1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\times 1\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty} \underset{\text{اگر } s>0}{=} -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

(2) $f(t)=t$

$$\mathcal{L}\{f(t)=t\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t\,dt = -\frac{1}{s}\, t e^{-st}\Big|_{t=0}^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt$$

جزء به جزء $\begin{cases} t=u \\ e^{-st}dt = dv \end{cases}$ $= -\frac{1}{s}(0-0) = -\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} \Rightarrow$

$$te^{-ts}\Big|_{t=\infty} = ?$$

$$\lim_{t\to\infty} te^{-st} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{st}} \underset{Hop}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{t\to\infty}\frac{1}{se^{st}} = 0$$

$\infty\times 0$ ابهام دارد.

$$\Rightarrow -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s>0$$

**نتیجه:** با استقرا می‌توان نشان داد:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin bx - b\cos bx\}$$

③ $f(t) = e^{at}$

a ثابت

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{(s-a)}e^{-(s-a)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{-1}{(s-a)}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

$s>a$ یعنی $(s-a)>0$ اگر

لذا: $\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}\,,\ s>a}$

④ $f(t) = \sin at$ a ثابت

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt \overset{*}{=} \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\{-s\sin at - a\cos at\}\Big|_{t=0}^{\infty}$$

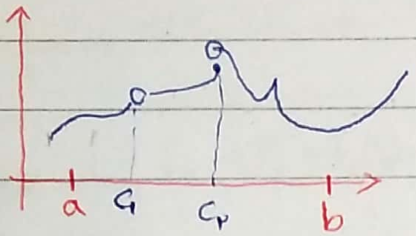
$s>0$ اگر $= \underbrace{\frac{0}{s^2+a^2}\{\text{کراندار است}\}}_{0} - \frac{1}{s^2+a^2}\{0-a\} = \frac{a}{s^2+a^2}$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos bx + b\sin bx\}$$

به طور مشابه $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{a^2+s^2}\ ,\ s>0$

**تعریف:** فرض کنید تابع $f(t)$ روی بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد می‌گوییم $f(t)$ روی $[a,b]$ پیوسته قطعه‌ای است هرگاه بتوان بازه $[a,b]$ را به تعداد متناهی زیر بازه تقسیم کنیم و به طوری که $f$ در هر نقطه درون هر زیر بازه پیوسته باشد و حد $f$ وقتی $t$ به نقاط انتهایی زیر بازه‌ها میل می‌کند، موجود باشد.

**مثال:**




**تعریف ۲:** تابع $f$ روی بازه‌ی $[0,+\infty)$ پیوسته قطعه‌ای می‌نامیم هرگاه $f$ روی هر زیر بازه کراندار $[0,b]$ پیوسته قطعه‌ای باشد.

**تعریف ۳:** تابع $f(t)$ تعریف شده روی بازه $[0,+\infty)$ را از مرتبه نمایی می‌نامیم هرگاه اعداد ثابت $\alpha$، $M$ و $T$ موجود باشد به طوری که:

$$\forall\ t\geq T:\ |f(t)|\leq Me^{\alpha t}$$

**قضیه ۱:** اگر $f(t)$ روی بازه‌ی $[0,+\infty)$ پیوسته قطعه‌ای و از مرتبه نمایی (با ثابت‌های $\alpha$ و $T,M$) باشد آنگاه

الف) برای هر $s>\alpha$، $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ موجود است.

ب) $\boxed{\lim_{s\to\infty}F(s)=0}$

**نتیجه از قسمت ب:** اگر $\lim_{s\to\infty}F(s)\neq 0$ آن گاه نمی‌توان تابعی مانند $f(t)$ یافت که

$$L\{f(t)\}=F(s)$$

مثال: اگر $F(s) = \dfrac{2-5s^3}{7s^3+s^2-1}$ چون $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = -\dfrac{5}{7} \neq 0$ پس تابعی وجود

ندارد که لاپلاس آن $F(s)$ باشد

## فصل ۴ . تبدیلات لاپلاس .

② $\mathcal{L}\{\sin 3t \cosh(2t)\} = ?$ $\quad = L\left\{\sin 3t\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\right)\right\}$

$F(s)=\frac{3}{s^2+9} \leftarrow f(t)$

$= \frac{1}{2}\left(L\{\sin 3t\, e^{2t}\} + \frac{1}{2}L\{\sin 3t\, e^{-2t}\}\right)$

قضیه اول انتقال با $a=2$ ، ق اول انتقال با $a=-2$

$= \frac{1}{2}\left(F(s-2) + F(s-(-2))\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{(s-2)^2+9} + \frac{3}{(s+2)^2+9}\right)$

قضیه ۳ : (خطی بودن) اگر $L\{f_1(t)\}=F_1(s)$ و $L\{f_2(t)\}=F_2(s)$ موجود باشند و $c_1$ و $c_2$ ثابت دلخواه آنگاه :

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\}$$
$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

مثال :

① $\mathcal{L}\{5e^{3t} - 2\cos 7t + 6t^4 - 3\} = ?$

$= 5\mathcal{L}\{e^{3t}\} - 2\mathcal{L}\{\cos 7t\} + 6\mathcal{L}\{t^4\} - 3\mathcal{L}\{1\}$

$= 5\times\underbrace{\frac{1}{s-3}}_{s>3} - 2\times\underbrace{\frac{s}{s^2+7^2}}_{s>0} + 6\times\underbrace{\frac{4!}{s^{4+1}}}_{s>0} - 3\times\frac{1}{s}$ و $s>3$

اشتراک کل دامنه‌ها را حساب کردیم

② $\mathcal{L}\{\sinh(5t)\} = ?$ $\quad \mathcal{L}\left\{\frac{e^{5t}-e^{-5t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{5t}\} - \mathcal{L}\{e^{-5t}\}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-5} - \frac{1}{s-(-5)}\right)$

③ $\mathcal{L}\{\cos^2 3t\} = ?$ $\quad \mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos 6t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cos 6t\}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+6^2}\right)$

قضیه ۴: (قضیه‌ی اول انتقال)

اگر $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ آنگاه: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$

① $\mathcal{L}\{e^{3t}t^5\} \underset{a=3\ \text{انتقال با}}{=} F(s-a)=F(s-3)=\frac{5!}{(s-3)^6}$

$f(t)$

$F(s)=\frac{5!}{s^6}$

قضیه ۵: (تبدیل لاپلاس مشتق) اگر تابع $f(t)$ روی بازه $\infty > t \geq 0$ پیوسته، و $f'(t)$ روی این بازه پیوسته قطعه‌ای باشد، و برای $s > s_0$ ($s_0$ یک عدد ثابت) تبدیل لاپلاس $f$ و $f'$ موجود باشد آن‌گاه:

$$* \; L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

نتیجه: اگر برای $f'$ و $f''$ نیز شرایطی مشابه قضیه قبل برقرار باشد آن‌گاه:

$$* \; L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

$g = f'(t)$ و لاپلاس $g'$ را حساب می‌کنیم. $\qquad f'' = (f')'$

و به طور مشابه با استقراء:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

مثال: اگر $f(t) = \int_0^t e^{5x} \cos 3x \, dx$ . $\quad L\{f(t)\} = ?$

هدف؟

می‌دانیم:

$$\underbrace{L\{f'(t)\}}_{L\{e^{5t}\cos 3t\}} = sL\{f\} - f(0) \quad , \quad f(0) = \int_0^0 e^{5x} \cos 3x \, dx = 0$$

$$f'(t) = e^{5t} \cos 3t$$

از ق اول انتقال

$$\xRightarrow[a=5]{} \frac{s-5}{(s-5)^2+9} \Rightarrow \frac{s-5}{(s-5)^2+9} = sL\{f(t)\} - 0$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{\dfrac{s-5}{(s-5)^2+9}}{s}$$

**تبدیل معکوس لاپلاس:** اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود و برابر $\ell\{f(t)\}=F(S)$ باشد آن گاه $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(S)$ می نامیم و می نویسیم:

$$f(t)=\ell^{-1}\{F(S)\}$$

**قضیه:** اگر توابع $f(t)$ و $g(t)$ روی بازه ی $[0,+\infty)$ پیوسته قطعه ای باشند و تبدیل لاپلاس $f$ و $g$ موجود و $\ell\{f(t)\}=\ell\{g(t)\}$ آن گاه در هر قطعه ای مانند $t$ که $f(t)$ پیوسته باشد در این صورت $f(t)=g(t)$

**نتیجه:** اگر $f(t)$ پیوسته باشد و $f(t)=\ell^{-1}\{F(S)\}$ آن گاه $f(t)$ منحصر به فرد است.

**قضیه: (خطی بودن $\ell^{-1}$):** اگر $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دو تابع و $f_1(t)=\ell^{-1}\{F_1(S)\}$ و $f_2(t)=\ell^{-1}\{F_2(S)\}$ آن گاه برای هر دو ثابت دلخواه $c_1$ و $c_2$:

$$\ell^{-1}\{c_1F(S)+c_2F_2(S)\}=c_1\ell^{-1}\{F_1(S)\}+c_2\ell^{-1}\{F_2(S)\}$$

$$=c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$$

تمرین ①: $\mathcal{L}\{\cos 2t \ \sinh(3t)\}$

②: $\mathcal{L}\{\int_0^t e^{2x}\sin 3x \, dx\}$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

① $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2-5s-14}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{22/9}{s-7}+\frac{5/9}{s+2}\right\}$

$s^2-5s-14 \to (s-7)(s+2)$

$F(s)$

تفکیک کسر

$\frac{3s+1}{s^2-5s-14}=\frac{A}{s-7}+\frac{B}{s+2} \to \dots \to A=\frac{22}{9} \quad B=\frac{5}{9}$

$=\frac{22}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-7}\right\}+\frac{5}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=\frac{22}{9}e^{7t}+\frac{5}{9}e^{-2t}$

تمرین ②: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2+7s+12}\right\}=?$

③ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\boxed{\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-4}+\frac{s-3}{s^2+4}\right\}$

$F(s)$

تفکیک کسر

$=\frac{A}{s+4}+\frac{Bs+C}{s^2+4} \to \dots \to A=4 \ , B=1 \ , C=-3$

$\leftarrow \frac{1}{2}\times 2$

$=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=$

$4e^{-4t}+\cos 2t-3\times\frac{1}{2}\sin 2t$

تمرین ④: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$

⑤ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^5}\right\}=? \quad f(t)=\frac{1}{4!}e^{3t}t^4$

$t^4 \to \frac{4!}{s^5} \rightsquigarrow \frac{1}{4!}t^4 \to \frac{1}{s^5} \xrightarrow[a=3]{\text{ق اول انتقال}} e^{3t}\frac{1}{4!}t^4 \to \frac{1}{(s-3)^5}$

تمرین ۶ : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{(s+4)^7}\right\} = ?$

$= e^{3t}\cos 2t + 2e^{3t}\sin 2t$

⑦ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\boxed{\frac{s+1}{s^2-6s+13}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-3)^2+4}\right\}$ $\xrightarrow[\text{با } a=3]{\text{از ق اول انتقال}}$

$F(s)$ مربع کامل

$\frac{s+1}{(s-3)^2+4} \overset{-3+3}{=} \frac{(s-3)+3+1}{(s-3)^2+4} = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} + \frac{4}{(s-3)^2+4}$

$\cos 2t \to \frac{s}{s^2+4}$ $\qquad e^{3t}\cos 2t \to \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$

$2\sin 2t \to \frac{4}{s^2+4}$ ($2\times 2$) $\qquad 2e^{3t}\sin 2t \to \frac{4}{(s-3)^2+4}$

⑧ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+2s+5}\right\} = e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t$

$(s+1)^2+4$

قضیه (تبدیل لاپلاس انتگرال) :

عدد ثابت

اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ برای $s > s_0 \geq 0$ موجود باشد

آنگاه :

$$L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s} \qquad s > s_0 \geq 0$$

و بنابراین (نتیجه) :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)\,dx$$

مثال : ① $L\left\{\int_0^t e^{-2x}\sin 5x\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s} = \frac{\frac{5}{(s+2)^2+25}}{s}$

$f(x)$

$F(s) \xrightarrow[\text{با } a=-2]{\text{از ق اول انتقال}} \frac{5}{(s+2)^2+25}$

② $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6s}\right\}$

روش اول : تفکیک کسر : $F(s) = \frac{1}{s(s-6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-6} \to \dots \to A = -\frac{1}{6}$ $\quad B = \frac{1}{6}$

جواب : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/6}{s} + \frac{1/6}{s-6}\right\} = -\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\}$

$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}e^{6t}$

Subject: Year: Month: Day: ( ) page: ( )

$f(t)=e^{4t}$ $F(s)$

روش دوم: (از نتیجه قضیه قبل): $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s-4}}{s}\right\}$

$$= \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t e^{4x}\,dx = \frac{1}{4} e^{4x}\Big|_0^t = \frac{1}{4}e^{4t} - \frac{1}{4}$$

## مشتق گیری از تبدیلات لاپلاس:

می دانیم $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

$$\frac{d}{ds}F(s) = F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st} f(t)\right)dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\,dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\left(t f(t)\right)dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$$

$$\rightarrow \boxed{L\{t f(t)\} = -F'(s)}$$

جزو فرمول هایی که خیلی کاربرد دارد
احتمال ۹۹ درصد در پایان ترم می آید

و به طور مشابه: $L\{t^2 f(t)\} = F''(s)$

و در حالت کلی:

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

مثال:

① $L^{-1}\{\ln(s-5)\} = ? \quad = f(t)\,?$

$$F(s) \rightarrow F'(s) = \frac{1}{s-5}$$

از فرمول $\Rightarrow L\{t f(t)\} = -F'(s) = \frac{-1}{s-5}$

$$\Rightarrow t f(t) = L^{-1}\left\{\frac{-1}{s-5}\right\} = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}$$

$$\Rightarrow t f(t) = -e^{5t} \Rightarrow f(t) = -\frac{e^{5t}}{t}$$

page : (   )

Subject:
Year : Month : Day : (  )

(۲) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\boxed{\ln\left(\frac{s^{2}+1}{s(s+1)}\right)}\right\} = ? = f(t)$

$$F(s) = \ln(s^{2}+1) - \underbrace{\ln(s(s+1))}_{\text{حاصل جمع } \ln} = \ln(s^{2}+1) - \ln s - \ln(s+1)$$

برای اینکه مشتق گیری از جلوی ln شلوغ نباشد lnها را از هم جدا کردیم.

$$F'(s) = \frac{2s}{s^{2}+1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

از روی فرمول

$$: \mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s) \rightarrow \mathcal{L}\{t f(t)\} = \frac{-2s}{s^{2}+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$\rightarrow t f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^{2}+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^{2}+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \Rightarrow t f(t) = -2\cos t + 1 + e^{-t}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{-2\cos t + 1 + e^{-t}}{t} \quad ✓$$

(۳) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\boxed{\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{s}\right)}}_{F(s)}\right\} = ?$

$$F'(s) = \frac{-\frac{2}{s^{2}}}{1+\left(\frac{2}{s}\right)^{2}} = \frac{-\frac{2}{s^{2}}}{\frac{s^{2}+4}{s^{2}}} = \frac{-2}{s^{2}+4}$$

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s) = \frac{2}{s^{2}+4}.$$

$$t f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^{2}+4}\right\} = \sin 2t \Rightarrow f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$$

$$y = \operatorname{Arctan} u \rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^{2}}$$

(۴) $L\{t^2 \cos 5t\} = ?$ فرمول $(-1)^2 F''(s) = F''(s)$

$f(t)$

$F(s) = \frac{s}{s^2+25} \rightarrow F'(s) = \frac{s^2+25-2(s)(s)}{(s^2+25)^2} = \frac{25-s^2}{(s^2+25)^2}$

$$F''(s) = \frac{-2s(s^2+25)^2 - 2(2s)(s^2+25)(25-s^2)}{(s^2+25)^4}$$

قضیه (انتگرال گیری از تبدیلات لاپلاس): اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ برای $s>0$ موجود، و $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ نیز موجود باشد آنگاه:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du \quad , \; s>0$$

نتیجه: اگر در قضیه قبل، $s \to 0^+$ آنگاه:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(u)\,du$$

مثال:

$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \overset{\text{از نتیجه}}{=} \int_0^\infty F(u)\,du = \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du$$

چون $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1 =$ موجود

ادامه $= \operatorname{Arctan} u \Big|_{u=0}^{\infty} = \operatorname{Arctan}(\infty) - \operatorname{Arctan}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

(۲) $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = ?$ صفحه بعد: $f(t)$ ?

$F(s)$

$\ell\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s \frac{2u}{(u^2+4)^2}\,du = \frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{dt}{t^2} \pm$ $\qquad u^2+4=t$, $2u\,du = dt$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = ? \quad = f(t)$$

$F(s)$

از فرمول: $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du = \int_s^\infty \frac{u}{(u^2+4)^2}du$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{2u}{(u^2+4)^2}du = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}$$

$t$

$$= -\frac{1}{2t} = \frac{-1}{2(u^2+4)}\Bigg|_{u=s}^{\infty}$$

$$\to L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \frac{1}{2(s^2+4)} \to \frac{f(t)}{t} = L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\to \boxed{f(t) = \frac{1}{4}\,t\sin 2t}$$

مثال:

① $L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x}dx\right\} = ?$

لاپلاس اش $\frac{1}{s^2+1}$

$f(x) \to F(s) = L\{f(t)\} = L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$

فرمول: $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$

از فرمول انتگرال گیری تبدیل لاپلاس: $\int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}du = \text{Arctan}\,u\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,s \quad = \frac{F(s)}{s}$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,s}{s} \checkmark \quad = \frac{\text{Arc}\cot s}{s}$$

مهم ② $L\left\{e^t\int_0^t \frac{e^{2x}-1}{x}dx\right\} = ?$ از قضیه اول انتقال با $a=1$: $= F(s-1)$

$f(t)$

اول: $F(s) = ? = L\left\{\int_0^t \frac{e^{2x}-1}{x}dx\right\} = \frac{G(s)}{s}$

$g(x)$

$$L\left\{\int_0^t g(x)\,dx\right\} = \frac{G(s)}{s}$$

دوم: $G(s) = L\{g(t)\} = L\left\{\frac{e^{2t}-1}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u}\right)du$

تبدیل لاپلاس: $\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}$



$$L\left\{\frac{h(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty H(u)\,du$$

$= \ln(u-2) - \ln u \Big|_s^\infty = \ln\left(\frac{u-2}{u}\right)\Big|_s^\infty = \ln(1) - \ln\left(\frac{s-2}{s}\right)$

$= -\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)$

جواب نهایی $= \dfrac{-\ln\left(\frac{s-1-2}{s-1}\right)}{s-1} = \dfrac{-\ln\left(\frac{s-3}{s-1}\right)}{s-1}$ ✓

$e^{-s} \to e^{-st} \to s=2$

(2) $\int_0^\infty t e^{-2t} \sin^2 t \, dt = ?$ نمایی را حذف می‌کنیم $\int_0^\infty e^{-2t} \underbrace{(t \sin^2 t)}_{f(t)} dt = F(s=2)$

$L\{f(t)\} = F(s)$

تعریف تبدیل لاپلاس $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = L\{f(t)\} = F(s)$

F(s) ابتدا محاسبه: $F(s) = L\{t \sin^2 t\} = -G'(s) = -\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{s^2} - \frac{(s^2+4-2s^2)}{(s^2+4)^2}\right\}$

$g(t) = \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

$G(s) = L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$

$\Rightarrow F(s) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{s^2} - \frac{(4-s^2)}{(s^2+4)^2}\right\}$

$\Rightarrow F(s=2) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{8}$

**کاربردهای تبدیل لاپلاس در حل مسائل مقدار اولیه:**

برای حل یک معادله دیفرانسیل با استفاده از لاپلاس، ابتدا از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم. سپس با به کارگیری فرمول های لاپلاس، $L\{y(t)\} = Y(s)$ را بدست می‌آوریم و سپس با استفاده از $L^{-1}$، جواب معادله یعنی $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ بدست می‌آید.

مثال: با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید:

① $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0 \qquad y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$

تذکر: البته این مسأله با فرمول $y(t)=c_1y_1+c_2y_2$ از روی معادله مشخصه $\lambda^2+3\lambda+2=0$ قابل حل است.

$$\xrightarrow{\text{از طرفین لاپلاس می‌گیریم}} L\{y''+3y'+2y\}=L\{0\}$$

$$\to \underbrace{L\{y''\}}_{s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)}+3\underbrace{L\{y'\}}_{sL\{y\}-y(0)}+2L\{y\}=0$$

$$\to \left(s^2L\{y\}-s\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{1}\right)+3\left(sL\{y\}-\underbrace{y(0)}_{0}\right)+2L\{y\}=0$$

$$\to (s^2+3s+2)L\{y\}-1=0 \Rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+2)}}_{\text{تفکیک کسر}}\right\}$$

تفکیک کسر: $\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}=\dots=A=1\ ,\ B=-1$

$$=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-t}-e^{-2t}$$

$\Rightarrow$ جواب: $y(t)=e^{-t}-e^{-2t}$

② $y''-3y'+2y=e^{-4t} \qquad y(0)=1\ ,\ y'(0)=5$

$$L\{y''\}-3L\{y'\}+2L\{y\}=L\{e^{-4t}\}$$

$$\to \left(s^2L\{y\}-s\underbrace{y(0)}_{=1}-\underbrace{y'(0)}_{5}\right)-3\left(sL\{y\}-\underbrace{y(0)}_{1}\right)+2L\{y\}=\frac{1}{s+4}$$

$$\to (s^2-3s+2)\,\mathcal{L}\{y\} \underbrace{- s - 5 + 3}_{-s-2} = \frac{1}{s+4}$$

$$(s^2-3s+2)\,\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s+4} + s + 2$$

$$\to \mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{1}{s+4} + \frac{s+2}{1}}{s^2-3s+2} = \frac{\frac{s^2+6s+9}{s+4}}{\frac{s^2-3s+2}{1}}$$

$$\to \mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2+6s+9}{(s+4)(s^2-3s+2)} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^2+6s+9}{(s+4)\underbrace{(s^2-3s+2)}_{(s-1)(s-2)}} \right\}$$

تفکیک کسر : $\dfrac{A}{s+4} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s-2}$

مثلاً برای بدست آوردن A: طرفین را در $s+4$ ضرب می‌کنیم و $s=-4$ را جایگذاری می‌کنیم

$$\cdots \to A = \frac{1}{30},\quad B = \frac{-16}{5},\quad C = \frac{25}{6}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{30}}{s+4} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{-\frac{16}{5}}{s-1} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{25/6}{s-2} \right\}$$

$$\to y(t) = \frac{1}{30} e^{-4t} - \frac{16}{5} e^{t} + \frac{25}{6} e^{2t}$$

۴)

$$t y'' - 4 t y' - 4 y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}\{t y''\} - 4\,\mathcal{L}\{t y'\} - 4\,\underbrace{\mathcal{L}\{y\}}_{Y(s)} = 0$$

ثابت=صفر — فرض $Y(s)$

جایگذاری $\to \left(-2sY - s^2 Y' + y(0)\right) - 4\left(Y - sY'\right) - 4Y = 0$

$$\to (-s^2+4s)\,Y' - 2sY = 0$$

یک معادله مرتبه اول (البته تفکیک‌پذیر) با تابع مجهول $Y(s)$

با حل آن $Y(s)$ محاسبه $\to \dfrac{Y'}{Y} = \dfrac{2s}{-s^2+4s}$

$$\int \frac{Y'}{Y}\, ds = \int \frac{2s}{-s(s-4)}\, ds = -2 \int \frac{ds}{s-4}$$

$$\rightarrow \ln y = -2\ln(s-4) + C \rightarrow \ln C_1$$

$$\rightarrow \ln y = \ln C_1 (s-4)^{-2} \rightarrow y = C_1 (s-4)^{-2} = \frac{C_1}{(s-4)^2}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{C_1}{(s-4)^2} \rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_1}{(s-4)^2}\right\} = C_1 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\}$$

$$\xrightarrow[a=4,\ f(t)=t]{\text{قاعده اول انتقال:}} y(t) = C_1 e^{4t}\, t \xrightarrow[y(0)=0,\ y'(0)=1]{\text{از شرایط اولیه}} 0 = C_1 \times 0 \rightarrow 0=0 \ \checkmark$$

$$\Rightarrow y'(t) = 4C_1 e^{4t} + C_1 e^{4t}$$

$$\rightarrow 1 = 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 1$$

جواب: $y(t) = t e^{4t}$

بدست آوردن بقیه: $\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$ ، $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$*:\ \mathcal{L}\{t y'\} = -\frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) = -(y + sy') = -y - sy'$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) \xrightarrow[\mathcal{L}\{y\}=Y(s)]{\text{با فرض}} sY(s) - y(0)$$

از فرمول $\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$

$$**:\ \mathcal{L}\{t y''\} = -\frac{d}{ds}\left(s^2 y - s y(0) - y'(0)\right) = -(2sy + s^2 y' - y(0))$$
$$= -2sy - s^2 y' + y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - s y(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$$

تمرین: به طور مشابه فرمولی برای $\mathcal{L}\{t^2 y'\}$ و $\mathcal{L}\{t^2 y''\}$ بیابید.

(۳) تمرین: $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$ ، $y(0) = 2$ ، $y'(0) = 6$

با روش های ضرایب نامعین و تغییر پارامترها هم می‌توان حل کرد.

(5) $ty'' + (2t+3)y' + (t+3)y = 3e^{-t} \qquad y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$

$$\mathcal{L}\{ty''\} + \mathcal{L}\{(2t+3)y'\} + \mathcal{L}\{(t+3)y\} = \mathcal{L}\{3e^{-t}\}$$

$$\to \mathcal{L}\{ty''\} + 2\mathcal{L}\{ty'\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{ty\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 3\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

بافرض $\mathcal{L}\{y\}=Y(s)$

$$\to (-2sY - s^2Y' + y(0)) + 2(-Y - sY') + 3(sY - y(0)) + (-Y') + 3Y = \frac{3}{s+1}$$

از سوال قبل $\mathcal{L}\{ty''\}$ را و ... را داریم.

$$\to \underbrace{(-s^2-2s-1)}_{-(s^2+2s+1) = -(s+1)^2}Y' + \underbrace{(-2s-2+3s+3)}_{s+1}Y = \frac{3}{s+1}$$

$$\to -(s+1)^2Y' + (s+1)Y = \frac{3}{s+1} \rightsquigarrow \text{خطی مرتبه اول}$$

طرفین تقسیم بر $-(s+1)^2$

$$\to Y' \underbrace{- \frac{1}{(s+1)}}_{P(s)} Y = \underbrace{\frac{-3}{(s+1)^3}}_{q(s)}$$

$$\to Y = Y(s) = \underbrace{e^{-\int -\frac{ds}{s+1}}}_{e^{\ln(s+1)} = s+1} \left\{ \int \frac{-3}{(s+1)^3} e^{\int -\frac{ds}{(s+1)}} ds + c \right\}$$

$$e^{-\ln(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

$$\to -3\int (s+1)^{-4} ds = \frac{-3(s+1)^{-3}}{-3}$$

$$\to Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + c(s+1)$$

$Y=\mathcal{L}\{y\}$

$$\to \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{(s+1)^2} + c(s+1)$$

$$\to y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\{c(s+1)\}$$

$f(t)=t$ و $a=-1$ با انتقال اول ق

$$= te^{-t} \to y(t) = te^{-t}$$

اگر $c \neq 0$ : $\lim_{s\to\infty} c(s+1) = \infty \neq 0$

لذا اگر $c\neq 0$ ، $\mathcal{L}^{-1}\{c(s+1)\}$ موجود نیست پس $c=0$ و $\mathcal{L}^{-1}\{0\}=0$

تابع گاما: به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad , x>0$$

نتیجه ۱:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^{x} e^{-t}\, dt \quad , x>-1$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

با جزء به جزء در $\Gamma(x+1)$:

$u=t^x$

$dv=e^{-t}dt$

$$\Gamma(x+1)=\cancel{uv\Big|_0^{+\infty}}^{\,0} - \int_0^{\infty} v\, du = -\int_0^{\infty} -e^{-t}(x t^{x-1})\, dt$$

$$= x\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x)$$

نتیجه ۲: برای هر عدد طبیعی n :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(n+1) = n\,\underbrace{\Gamma(n)}_{n(n-1)\Gamma(n-1)}$$

$$= \cdots$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1\,\Gamma(1)^{=1}$$

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1$$

$$= n(n-1)\cdots 1 = n!$$

نتیجه ۳: برای هر $r>-1$ :

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \quad , s>0 \qquad x>0$$

زیرا: $\mathcal{L}\{t^r\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^r\, dt =$

$u=st \longrightarrow du=s\,dt \rightarrow dt=\frac{du}{s}$

$s>0 \quad t=\frac{u}{s}$

چون $0<t<\infty \rightarrow 0<u<\infty$

$$=\int_{u=0}^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^r \frac{du}{s}$$

$$=\frac{1}{s^{r+1}}\int_0^{\infty} u^r e^{-u}\, du = \frac{1}{s+1}\,\Gamma(r+1)$$

Subject:
Year : Month : Day : ( ) page : ( )

$r=\frac{3}{5}>-1$ ✓

مثال:

① $\mathcal{L}\{t^{\frac{3}{5}}\}=?\quad=\frac{\Gamma(\frac{3}{5}+1)}{s^{\frac{3}{5}+1}}=\frac{\Gamma(8/5)}{s^{8/5}}$

$r=-\frac{1}{2}>-1$ ✓

② $\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\}=?\quad\frac{\Gamma(-1/2+1)}{s^{-1/2+1}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}}$ چرا؟ $\rightarrow=\sqrt{\pi}$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

زیرا: $\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma((-\frac{1}{2})+1)=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt\qquad\frac{t=u^2}{dt=2u\,du}\qquad 0<u<\infty$

$$\int_0^\infty (u^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-u^2}\,du\;2u\,du=\underbrace{2\int_0^\infty e^{-u}\,du}_{\text{از ریاضی ۲ با مختصات قطبی}}=2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}$$

مثال: با استفاده از تعریف لاپلاس، $\mathcal{L}\{f(t)\}$ را بدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & 0<t<\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}$$

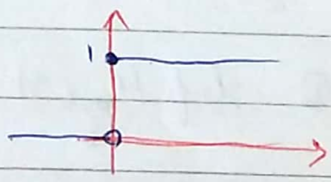
$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt+\cancel{\int_\pi^\infty e^{-st}\times 0\,dt}$$

$$=\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt=\frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s\sin t-\cos t)\Big|_{t=0}^{\pi}\quad ?$$

$$=\ldots=\frac{e^{-s\pi}+1}{s^2+1}$$

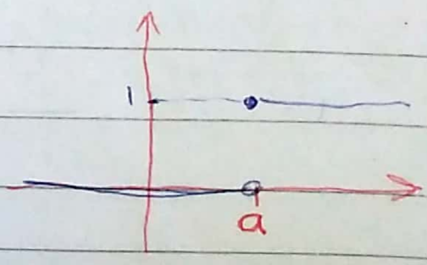
تابع پله‌ای واحد (تابع هویساید): به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(t)\ \text{یا}\ H(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\geq a\end{cases}$$




همچنین برای هر $a>0$ تابع $H_a(t)$ یا $u_a(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_a(t)\ \text{یا}\ H_a(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\geq a\end{cases}$$




Soroush

: $0 < a < b$

$$H_a(t) - H_b(t) = \begin{cases} 0-0=0 & t<a \\ 1-0=1 & a\le t<b \\ 1-1=0 & t\geq b \end{cases}$$

① $$f(t) = \begin{cases} \sin 3t & 0\le t<3 \\ 2-5t^2 & 3\le t<4 \\ 7 & t\geq 4 \end{cases}$$

برای $0\le t<3 =1$ ، برای $3\le t<4 =1$ ، برای $t\geq 4 =1$

$$f(t) = (\sin 3t)\big(H_0(t) - H_3(t)\big) + (2-5t^2)\big(H_3(t) - H_4(t)\big) + 7\big(H_4(t)\big)$$

مثال: تابع $f(t)$ ① را می‌توان به شکل بالا نوشت:

تبدیل لاپلاس تابع هوی‌ساید: اگر $a>0$ آنگاه:

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad s>0$$

قضیه دوم انتقال: اگر $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ برای $s>a>0$ موجود باشد آنگاه:

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\, f(t)\} = e^{-as}\, \mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

نتیجه:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = H_a(t)\, f(t-a)$$

مثال:

① $$\mathcal{L}\{H_{\underset{a}{\pi}}(t)\, \overset{f(t)}{\sin t}\} =$$

از قضیه دوم انتقال با $a=\pi$: $= e^{-as}\, \mathcal{L}\{f(t+a)\} \rightarrow \sin(t+\pi) = -\sin t$ تابع ۳

$$= e^{-\pi s}\, \mathcal{L}\{\sin(t+\pi)\}$$

$$= e^{-\pi s}\, \mathcal{L}\{-\sin t\}$$

$$= e^{-\pi s} \times \frac{-1}{s^2+1}$$

(11) ص/۱ $f(t)=\begin{cases}\sin 3t & 0\leq t<\pi\\ 2-5t^2 & \pi\leq t<2\pi\\ 7 & t\geq 2\pi\end{cases}$ [illegible] $\mathcal{L}\{f(t)\}=?$

حل: مسأله مثال های قبل:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{(\sin 3t)(H_0(t)-H_\pi(t))+(2-5t^2)(H_\pi(t)-H_{2\pi}(t))+7H_{2\pi}(t)\}$$

$$\overset{①}{=}\mathcal{L}\{H_0(t)\sin 3t\}-\mathcal{L}\{H_\pi(t)\sin 3t\}+\mathcal{L}\{H_\pi(t)(2-5t^2)\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} \qquad e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin 3(t+\pi)\}$$

$$-\mathcal{L}\{H_{2\pi}(t)(2-5t^2)\}+\mathcal{L}\{7H_{2\pi}(t)\}$$

همیشه $H_0(t)=1$ یا $u_0(t)=1$

از تعریف در استفاده

$$=\frac{3}{s^2+9}-e^{-\pi s}\left(\frac{-3}{s^2+9}\right)+e^{-\pi s}\mathcal{L}\{2-5(t+\pi)^2\}$$

$$-e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{2-5(t+2\pi)^2\}+\frac{7e^{-2s\pi}}{s}$$

$$2-5(t^2+4\pi^2+4\pi t)$$

$\sin 3(t+\pi)=$
$\sin(3t+3\pi)=$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin 3t$

$$=\frac{3}{s^2+9}-e^{-\pi s}\left(\frac{-3}{s^2+9}\right)+e^{-\pi s}\left(-5\times\frac{2!}{s^3}-10\pi\times\frac{1}{s^2}+(2-5\pi^2)\times\frac{1}{s}\right)$$

$$-e^{-2\pi s}\left(-5\times\frac{2!}{s^3}-20\pi\times\frac{1}{s^2}+(2-20\pi^2)\frac{1}{s}\right)+\frac{7e^{-2\pi s}}{s}$$

کاربرد تابع هوی ساید در حل مسائل مقدار اولیه:

مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید

① $y''+4y=f(t)$ $\qquad y(0)=y'(0)=0$

$f(t)=\begin{cases}1 & 0\leq t<1\\ 0 & t\geq 1\end{cases}$ $\qquad f(t)=1(\underbrace{H_0(t)}_{=1}-H_1(t))+0\times H_1(t)$

$=1-H_1(t)$

$$\mathcal{L}\{y''\}+4\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\rightarrow \left(s^2 \mathcal{L}\{y\} - s\,y(0) - y'(0)\right) + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1 - H_1(t)\}$$

$$\text{یا } \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{H_1(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\rightarrow (s^2+4)\,\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}$$

جملات نمایی را با بقیه قاطی نمی‌کنیم

$$\rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}\right\}$$

تفکیک کسر : $\frac{1/4}{s} + \frac{-\frac{1}{4}s}{s^2+4}$

تفکیک کسر : $\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$

$A = \frac{1}{4}$

$B = -\frac{1}{4}$ $\quad C = 0$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/4}{s} + \frac{-\frac{1}{4}s}{s^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}e^{-s}}{s} + \frac{-\frac{1}{4}e^{-s}s}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}s}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\times 1 - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}H_1(t) + \frac{1}{4}H_1(t)\cos 2(t-1)$$

نکته:

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{s}{s^2+4}\right\} \underset{\text{دوم انتقال با } a=1}{\overset{\text{از نتیجه ق}}{=\!=}}$$

$F(s)$

$f(t) = \cos 2t$

$$H_a(t)\, f(t-a)$$

$$= H_1(t)\, f(t-1)$$

$$= H_1(t)\cos 2(t-1)$$

Subject:
Year : Month : Day : ( ) page : ( )

همان $H_\pi(t)$

(2) $y'' + y = t\,(1 - u_\pi(t)) \qquad y(0) = 5 \ , \ y'(0) = 0$

$\ell\{y''\} + \ell\{y\} = \ell\{t\,(1 - u_\pi(t))\} \qquad f(t) \to f(t+a) = f(t+\pi) = t+\pi$

$(s^2\ell\{y\} - s\,y(0) - y'(0)) + \ell\{y\} = \ell\{t\} - \ell\{u_\pi(t)\,t\}$

$(s^2+1)\,\ell\{y\} - 5s = \dfrac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\,\ell\{t+\pi\}$

$(s^2+1)\,\ell\{y\} = 5s + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2} - \dfrac{\pi e^{-\pi s}}{s}$

$\to \ell\{y\} = \dfrac{5s}{s^2+1} + \dfrac{1}{s^2(s^2+1)} - \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+1)} - \dfrac{\pi e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}$

$\to y(t) = \ell^{-1}\left\{\dfrac{5s}{s^2+1}\right\} + \ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} - \ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+1)}\right\} - \pi\,\ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}\right\}$

تفکیک کسر $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+1}$ — تفکیک کسر — تفکیک کسر $\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$

$y(t) = 5\cos t + \ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} - \ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} - \ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2}\right\} + \ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$ ☆

از قضیه تغییر در انتقال با $a = \pi,\ F(s) = \dfrac{1}{s^2} \to f(t) = t$

$- \pi\,\underbrace{\ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s}\right\}}_{H_\pi(t)} + \pi\,\underbrace{\ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}\,s}{s^2+1}\right\}}_{?}$

$\ell^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = H_a(t)\,f(t-a) = H_\pi(t)\,(t-\pi)$

☆ : $a = \pi,\ F(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \qquad f(t) = \sin t \qquad f(t-\pi) = \sin(t-\pi) = -\sin(\pi - t) = -\sin t$

$= H_\pi(t)\,(-\sin t)$

? : $a = \pi \qquad F(s) = \dfrac{s}{s^2+1} \qquad f(t) = \cos t \qquad f(t-a) = \cos(t-\pi) = \cos(\pi - t) = -\cos t$

$? = H_\pi(t)\,(-\cos t)$

$y(t) = 5\cos t + t - \sin t - H_\pi(t)\,(t-\pi) + H_\pi(t)\,(-\sin t) - \pi H_\pi(t) + H_\pi(t)\,(-\cos t)$

Soroush

page: ( )

Subject:
Year : Month : Day : ( )

## تبدیل لاپلاس توابع متناوب :

تعریف : تابع $f(t)$ که برای $0<t<\infty$ تعریف شده است، متناوب با دوره تناوب $T$ می‌نامیم هرگاه برای هر $t>0$ ، $f(t+T)=f(t)$

قضیه : اگر $f(t)$ برای $0<t<\infty$ متناوب با دوره تناوب $T$ باشد، و $\mathcal{L}\{f(t)\}$ موجود باشد آنگاه :

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-Ts}}$$

مثال : اگر $f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<1\\ -1 & 1\le t\le 2\end{cases}$ و $f(t+2)=f(t)$ ($T=2$) آنگاه $\mathcal{L}\{f(t)\}=?$

$f$ متناوب با دوره تناوب $T=2$ است. پس :

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^{T=2} e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{\int_0^1 e^{-st}\times 1\,dt+\int_1^2 e^{-st}(-1)\,dt}{1-e^{-2s}}=\frac{\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{1}+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=1}^{2}}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{s}(e^{-s}-1)+\frac{1}{s}(e^{-2s}-e^{-s})}{1-e^{-2s}}$$

## تابع دلتای دیراک (ضربه واحد) :

برای $a>0$ ، تابع $h_a(t)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$h_a(t)=\begin{cases}\frac{1}{a} & b\le t\le b+a\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

که $b>0$ عددی حقیقی است.

(یعنی $h_a(t)=\frac{1}{a}(H_b(t)-H_{b+a}(t))$ )

تابع دلتای دیراک به صورت زیر تعریف می‌شود : (برای $b>0$) :

$$\delta_b(t)=\lim_{a\to 0}h_a(t)=\begin{cases}\infty & t=b\\ 0 & t\ne b\end{cases}$$

Soroush

Scanned by CamScanner

$$\int_0^\infty \delta_b(t)\,dt = 1$$ تعبیر: الف)

$$L\{\delta_b(t)\} = e^{-bs}$$ ب)

الف) $\int_0^\infty \delta_b(t)\,dt = \int_0^\infty \lim_{a\to 0} h_a(t)\,dt = \lim_{a\to 0} \int_0^\infty h_a(t)\,dt$

$= \lim_{a\to 0} \int_0^\infty \frac{1}{a}\left(H_b(t) - H_{b+a}(t)\right)dt = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \int_0^\infty \left(H_b(t) - H_{b+a}(t)\right)dt$

$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\left(\int_b^{+\infty} 1\,dt - \int_{b+a}^{\infty} 1\,dt\right) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \times a = 1$

$\int_{\infty}^{b+a}$

$\int_b^\infty 1\,dt + \int_{+\infty}^{b+a} dt = \int_b^{b+a} dt = (b+a) - b = a$

مثال: مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$y'' + y = 4\,\delta_{2\pi}(t)$ $\qquad y(0)=1 \quad y'(0)=0$

حواسمان باشد با $H(t)$ قاطی نکنیم.

$\ell\{y''\} + \ell\{y\} = 4\,\ell\{\delta_{2\pi}(t)\}$

$\to s^2\ell\{y\} - s\,y(0) - y'(0) + \ell\{y\} = 4e^{-2\pi s}$ $\quad (y(0)=1,\ y'(0)=0)$

$\to (s^2+1)\,\ell\{y\} - s = 4e^{-2\pi s}$

$\ell\{y\} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

$\to y(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + 4\,\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right\}$

$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \to f(t) = \sin t$

$a = 2\pi \to f(t-a) = \sin(t-2\pi)$

$= -\sin(2\pi - t)$

$= -\sin(-t)$

$= \sin t$

$\to y(t) = \cos t + 4H_{2\pi}(t)\sin t$

page: ( )

Subject:
Year: Month: Day: ( )

## انتگرال های تلفیقی (کانولوشن):

پیچش

تعریف: اگر $f(t)$ و $g(t)$ روی بازه $t \geq 0$ تعریف شده و پیوسته قطعه‌ای باشند، آنگاه تلفیق (پیچش) دو تابع $f$ و $g$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du$$

نتیجه: برای هر سه تابع $f$ و $g$ و $h$ به طور قطعه‌ای پیوسته روی $t \geq 0$ و هر دو ثابت دلخواه $\alpha$ و $\beta$ داریم:

الف) $f*g = g*f$

ب) $(\alpha f+\beta g)*h = \alpha(f*h)+\beta(g*h)$

مثال: اگر $f(t)=3t$ و $g(t)=t^2$ ، $(f*g)(t)=?$

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du = \int_0^t 3u\, \underbrace{(t-u)^2}_{t^2-2tu+u^2}\, du =$$

$$= 3\int_0^t (t^2u - 2tu^2 + u^3)\, du$$

$$= 3\left(\frac{t^2u^2}{2} - \frac{2tu^3}{3} + \frac{u^4}{4}\right)\Bigg|_{u=0}^{t}$$

$$= 3\left(\frac{t^4}{2} - \frac{2t^4}{3} + \frac{t^4}{4}\right) = 3\left(\frac{t^4}{12}\right) = \frac{1}{4}t^4$$

Subject:
Year : Month : Day : ( ) page : ( )

قضیه: اگر $f(t)$ و $g(t)$ روی $0 \le t < \infty$ پیوسته قطعه‌ای باشند و $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ و $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ موجود باشند آنگاه:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

نتیجه: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = (f * g)(t)$

مثال: ① $\mathcal{L}\{\int_0^t \underbrace{u^5}_{f(u)}\, \underbrace{e^{3(t-u)}}_{g(t-u)}\, du\} = ?$

$f(u) = u^5 \rightarrow f(t) = t^5 \rightarrow F(s) = \frac{5!}{s^6}$

$g(t-u) = e^{3(t-u)} \rightarrow g(t) = e^{3t} \rightarrow G(s) = \frac{1}{s-3}$

حل: $\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du\} \overset{\text{فرمول}}{=} F(s)\,G(s) = \frac{5!}{s^6} \cdot \frac{1}{s-3}$

② $\mathcal{L}\{e^t \int_0^t e^{-2u} \left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right) du\} = ?$

روش اول: به کمک قضیه اول انتقال

از قضیه اول انتقال با $a=1$: $\mathcal{L}\{e^{at} \underline{f(t)}\} = F(s-a)$

$\hookrightarrow f(t) = \int_0^t e^{-2u} \left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right) du$

روش دوم: با انتگرال کانولوشن:

$\mathcal{L}\{\int_0^t e^t e^{-2u} \left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right) du\}$

$= \mathcal{L}\{\int_0^t \underbrace{e^{t-u}}_{g(t-u)} \overbrace{\left(\frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\right)}^{f(u)} du\} = F(s) \cdot G(s) \; **$

$\hookrightarrow g(t) = e^t \rightarrow G(s) = \frac{1}{s-1}$

$f(t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\}$

$= \underbrace{\mathcal{L}\{\frac{e^{-t}}{t}\}}_{\frac{1}{s+1}} - \underbrace{\mathcal{L}\{\frac{e^{-2t}}{t}\}}_{\frac{1}{s+2}}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$$ : سمت راست از فرمول $\int_s^\infty \frac{1}{u+1}\,du - \int_s^\infty \frac{1}{u+2}\,du$

$$= \left(\ln(u+1) - \ln(u+2)\right)\Big|_s^\infty$$

$$= \ln\left(\frac{u+1}{u+2}\right)\Big|_s^\infty = \ln(1) - \ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right) = -\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)$$

** با جاگذاری در * : $-\ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right) \times \frac{1}{s-1}$

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = ?$ $\quad \frac{\text{از فرمول}}{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}} \quad (f * g)(t)$

$\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$

$F(s) \quad G(s)$

$f(t) = \sin t \quad g(t) = \sin t$

$$= \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$$

$$= \int_0^t \sin u \sin(t-u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \left(\cos(2u-t) - \cos t\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2u-t) - (\cos t)\,u\right)\Big|_{u=0}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\sin t - t\cos t\right) - \left(\frac{1}{2}\sin(t) - 0\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

** $\sin p \sin q = \frac{1}{2}\cos(p-q) - \cos(p+q)$

$$\underbrace{\sin u}_{p}\ \underbrace{\sin(t-u)}_{q} = \frac{1}{2}\left(\cos(u-(t-u)) - \cos(u+t-u)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(2u-t) - \cos t\right)$$

## معادلات انتگرالی و دیفرانسیل انتگرالی:

مثال: مسائل زیر را حل کنید.

(1) $y'(t) = t + \int_0^t y(t-u)\cos u \, du \quad , \; y(0)=0$

حل: $\mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{\int_0^t \underbrace{y(t-u)}_{g(t-u)} \underbrace{\cos u}_{f(u)} \, du\}$

$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s) = \frac{s}{s^2+1} Y(s)$

$g(t-u) = y(t-u) \to g(t) = y(t)$

$\to G(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$f(u) = \cos u \to f(t) = \cos t \to F(s) = \frac{s}{s^2+1}$

$\to s\underbrace{\mathcal{L}\{y\}}_{Y(s)} - \underbrace{y(0)}_{0} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} Y(s)$

$\to \left(s - \frac{s}{s^2+1}\right) Y = \frac{1}{s^2}$

$\to \left(\frac{s^3 \cancel{+s} \cancel{-s}}{s^2+1}\right) Y = \frac{1}{s^2}$

$\to Y = \frac{s^2+1}{s^5} \xrightarrow{Y=\mathcal{L}\{y\}} \mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2+1}{s^5}$

جواب: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+1}{s^5}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^5}\}}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{4!} \times \frac{4!}{s^5}\} = \frac{1}{4!} t^4$

$\to y(t) = \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{4!} t^4$

تمرین: (2) $y(t) = \sin t + \int_0^t \sin(2t-2u)\, y(u)\, du$

(3) $y' + \int_0^t y(r)\, dr + y = t^{1394}\, \delta_1(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$

$\rightarrow$ از فرمول: $\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)\, dx\} = \frac{F(s)}{s}$

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{\int_0^t y(r)\, dr\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^{1394}\, \delta_1(t)\}$$

$$(s\overset{Y}{\mathcal{L}\{y\}} - y(0)) + \frac{Y(s)}{s} + \mathcal{L}\{y\} = e^{-s} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}\{y\} = Y(s)}$$

$$(s + \frac{1}{s} + 1)\, Y = e^{-s} \rightarrow \frac{s^2+1+s}{s}\, Y = e^{-s}$$

$$\rightarrow Y = \frac{e^{-s}\, s}{s^2+s+1} \longrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s} \frac{s}{s^2+s+1}\}$$

$F(s) \rightarrow f(t) = ?$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = H_a(t)\, f(t-a)$$ :فرمول

با $a=1$

$$= H_1(t) \left( e^{-\frac{1}{2}(t-1)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}(t-1)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) \right)$$

$$* \; f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+s+1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\}$$

تجزیه نمی‌شود ، مربع کامل

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\}$$

از تغییر اول انتقال $= e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

# «فصل ۵» حل معادلات مرتبه دوم به روش سری ها

**تعریف:** یک سری توانی حول نقطه $x=x_0$ به شکل زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

که $a_n$ ها ضرایب ثابتی هستند.

**تعریف (تابع تحلیلی):** می‌دانیم که برای تابع $f(x)$ بسط تیلور $f(x)$ حول $x=x_0$ به شکل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \quad (*)$$

است.

حال اگر سری $(*)$، برای یک $R>0$ (شعاع همگرایی سری $(*)$)، به ازای هر $x$ متعلق به $(R-x_0, R+x_0)$ به $f(x)$ همگرا باشد، آنگاه می‌گوییم $f(x)$ در $x=x_0$ تحلیلی است. یعنی به نوعی هرگاه بتوان برای $f$، بسط تیلورش را حول $x=x_0$ نوشت.

**تعریف نقاط عادی و تکین:** معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (1) را در نظر بگیرید. هرگاه $p(x)$ یا $q(x)$ در $x=x_0$ تحلیلی نباشد $x_0$ را یک نقطه تکین (منفرد) معادله (1) می‌نامند، و هرگاه $p(x)$ و $q(x)$ هر دو در $x=x_0$ تحلیلی باشند، $x=x_0$ یک نقطه عادی معادله (1) نام دارد.

**تذکر:** برای توابع کسری گویا (صورت و مخرج چندجمله‌ای باشند)، ریشه‌ها مخرج نقاط تکین آن‌ها بوده و سایر نقاط، نقاط عادی‌اند.
لذا این توابع در ریشه‌های مخرج، تحلیلی نیستند.

**تعریف:** در معادله (1) هرگاه $x=x_0$ یک نقطه تکین معادله باشد و توابع $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در $x=x_0$ تحلیلی باشند، آنگاه $x=x_0$ یک نقطه تکین منظم معادله (1) نام دارد. در غیر این صورت هرگاه حداقل یکی از توابع فوق در $x=x_0$ تحلیلی نباشد، $x=x_0$ یک نقطه تکین نامنظم معادله (1) نامیده می‌شود.

مثال: نقاط عادی، تکین منظم و نامنظم معادله زیر را مشخص کنید.

$$x^2(x-1)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0$$

$$p(x) = \frac{2x+1}{x^2(x-1)} \qquad q(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

الف) ریشه‌های مخرج $p(x)$ و $q(x)$ : $x = 0, 1$ ← نقاط تکین

ب) مجموعه نقاط عادی $= \mathbb{R} - \{0, 1\}$

① برای $x=0$ : $(x-0)p(x) = x\left(\frac{2x+1}{x^2(x-1)}\right) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$ → در $x=0$ تحلیلی نیست

$(x-0)^2 q(x) = x^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ⇒ در $x=0$ تحلیلی است

⇒ درمجموع $x=0$ نقطه تکین نامنظم معادله

② برای $x=1$ :

$$(x-1)p(x) = (x-1)\frac{2x+1}{x^2(x-1)} = \frac{2x+1}{x^2}$$

$$(x-1)^2 q(x) = (x-1)^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = (x-1)(x+1)$$

هردو در $x=1$ تحلیلی‌اند. لذا $x=1$ یک نقطه تکین منظم معادله.

اکنون در ادامه، جواب‌های به صورت سری نامتناهی حول نقاط عادی و تکین منظم را تشریح می‌کنیم.

(الف) جواب به صورت سری حول یک نقطه عادی:

قضیه: اگر $p(x)$ و $q(x)$ در معادله (1)، در $x=x_0$ تحلیلی باشند (یعنی $x=x_0$ یک نقطه عادی معادله ① باشد) آن‌گاه هر جواب $y(x)$ از (1) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad ②$$

که $a_n$ ها ضرایب ثابتی اند. (معمولاً با جایگذاری ② در معادله ① رابطه بین $a_n$ ها را بدست می‌آورید.)

نکته: در رابطه ② بالا، چون سری ② همان بسط تیلور جواب $y(x)$ حول نقطه عادی $x=x_0$ است لذا:

$$a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$$

مثال: اگر جواب مسأله مقدار اولیه $y''-2xy'+8y=0$ ، $y(0)=12,\ y'(0)=0$ بصورت سری توانی $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ باشد آنگاه ضریب $a_2$ را تعیین کنید.

$x^n=(x-0)^n \to x_0=0$ : حول صفر

$$\begin{cases} p(x)=-2x \\ q(x)=8 \end{cases}$$

هر دو تابع در $x=0$ تحلیلی اند ← $x=0$ نقطه عادی معادله است.

طبق نکته: $a_2=\frac{y''(x_0)}{2!}=\frac{y''(0)}{2}=\frac{-96}{2}=-48$

طبق صورت معادله می‌توان نوشت ← : به ازای $x=0$ : $y''(0)-2(0)y'(0)+8y(0)=0$

$$y''(0)+8(12)=0 \to y''(0)=-96$$

تمرین: در مثال قبل ضریب $a_3$ را بیابید.

$(x-0)^n \to x_0=0$

مثال: هرگاه $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب برای $\begin{cases} y''+xy=0 \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$ باشد ضریب $a_3$ را بیابید.

$$\begin{cases} p(x)=0 \\ q(x)=x \end{cases}$$

هر دو در $x=0$ تحلیلی ← $x=0$ یک نقطه عادی معادله

$$a_3=\frac{y'''(x_0)}{3!}=\frac{y'''(0)}{6}=\frac{-1}{6}$$

از طرفین معادله مشتق نسبت به $x$

$$y'''+y+xy'=0 \to y'''(0)+y(0)+0\times y'(0)=0 \to y'''(0)+1=0$$

$$\to y'''(0)=-1$$

مثال: جواب معادله زیر را در مجاورت $x=0$ بدست آورید.

$$y''+xy'+y=0$$

هر دو در $x=0$ تحلیلی اند $\rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} p(x)=x \\ q(x)=1 \end{array}\right.$

$x=0$ یک نقطه عادی معادله است

(فقط برای بدست آوردن $p$ و $q$ ضریب $y''$ یک باشد وقتی خواستیم جایگذاری کنیم در خود معادله جایگذاری می‌کنیم بر ضریب $y''$ تقسیم نمی‌کنیم!) ⚠

طبق قضیه جواب معادله حول $x=0$ به شکل زیر است:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \qquad ①$$

برای یافتن $a_n$ ها، $y(x)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots)$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad (=2a_2+6a_3x+\cdots)$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$n \rightarrow n+2$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+2-1)a_{n+2}x^{n-2+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} n a_n x^n$$

جمله صفر را اضافه می‌کنیم تاثیری ندارد.

$$=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\rightarrow \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\underbrace{(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+a_n}\Big)x^n=0$$

باید: $\rightarrow$ $(n+2)(n+1)a_{n+2}+\underbrace{na_n+a_n}_{(n+1)a_n}=0$

$$\rightarrow \boxed{a_{n+2}=\frac{-a_n}{n+2}} \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

Subject:
Year : Month : Day : ( )

page : ( )

همین کافی
$$\begin{cases} n=0 \rightarrow a_2 = -\dfrac{a_0}{2} = -\dfrac{1}{2}a_0 \\ n=1 \rightarrow a_3 = -\dfrac{a_1}{3} = -\dfrac{1}{3}a_1 \end{cases}$$
$a_0$ و $a_1$ دو ثابت دلخواه

$$n=2 \rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}a_0\right) = \frac{1}{8}a_0$$

$$n=3 \rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5} = -\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}a_1\right) = \frac{1}{15}a_1$$

$$\vdots$$

در ① جایگذاری

$$\longrightarrow y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$= a_0 + a_1 x + \left(-\frac{1}{2}a_0\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3}a_1\right)x^3 + \frac{1}{8}a_0 x^4 + \frac{1}{15}a_1 x^5 + \dots$$

$$\rightarrow y(x) = a_0\overbrace{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \dots\right)}^{\text{همان } y_1(x)} + a_1\underbrace{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 \dots\right)}_{\text{همان } y_2(x)}$$

همان نقش $c_1$ — همان نقش $c_2$

جواب: $c_1 y_1 + c_2 y_2$

(با روش سری حل کردیم می‌توانیم $y(0)=a$ و $y'(0)=b$ در نظر بگیریم و با روش لاپلاس نیز حل کنیم)

مثال: غیرهمگن $y'' + xy' + y = e^x$ حول $x=0$

حل: $x=0$ یک نقطه عادی است.

جواب: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

در معادله جایگذاری ← ... ← راه حل مشابه مثال قبل

طبق بسط سری مربوط به $e^x$

$$\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n + a_n\right) x^n = e^x = \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

لذا: $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = \dfrac{1}{n!}$ $\quad n=0,1,2,3,\dots$

$$\rightarrow a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)n!} - \frac{(n+1)a_n}{(n+2)(n+1)} \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

$$\rightarrow a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} - \frac{a_n}{n+2} \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

$$\rightarrow \begin{cases} n=0 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2!} - \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_0 \\ n=1 \rightarrow a_3 = \frac{1}{3!} - \frac{a_1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}a_1 \end{cases}$$

$$n=2 \rightarrow \dots \rightarrow a_4 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8}a_0$$

$$n=3 \rightarrow \dots \rightarrow a_5 = -\frac{1}{40} + \frac{1}{15}a_1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

در قرار ①

$\rightarrow$ جواب: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$$= a_0 + \overset{\alpha}{a_1} x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\overset{\alpha}{a_1}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{8}a_0\right)x^4$$

$$+ \left(-\frac{1}{40} + \frac{1}{15}\overset{\alpha}{a_1}\right)x^5 + \dots$$

$$\rightarrow y(x) = \underset{c_1 \text{ یا}}{a_0}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \dots\right)}_{y_1(x)} + \overset{c_2 \text{ یا}}{a_1}\underbrace{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \dots\right)}_{y_2(x)}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \dots\right)}_{y_p(x)}$$

مثال: جواب $y''+(x-1)y'+y=0$ را در مجاورت $x=0$ بیابید.

$$\begin{cases} p(x)=x-1 \\ q(x)=1 \end{cases}$$ ← هر دو در $x=0$ تحلیلی. ← $x=0$ نقطه عادی معادله

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots \quad ①$$

$$\rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ , \ y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

در معادله $y''+xy'-y'+y=0$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}}+\underbrace{x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}+\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} a_n x^n=0$$

$n\to n+2$

$$=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} n a_n x^n$$

$n\to n+1$

$$\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\rightarrow y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n-(n+1)a_{n+1}+a_n\Big)x^n=0$$

$$\rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n-(n+1)a_{n+1}=0$$

$$\rightarrow a_{n+2}=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+2} \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$\begin{cases} n=0 \rightarrow a_2=\dfrac{a_1-a_0}{2}=\dfrac{1}{2}a_1-\dfrac{1}{2}a_0 \\ n=1 \rightarrow a_3=\dfrac{a_2-a_1}{3}=\dfrac{1}{3}a_2-\dfrac{1}{3}a_1=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}a_1-\dfrac{1}{2}a_0\right)-\dfrac{1}{3}a_1 \end{cases}$$

$$=\frac{1}{6}a_1-\frac{1}{6}a_0-\frac{1}{3}a_1$$

page: (   )　　Subject:
Year:　Month:　Day:　(   )

در ① قرار $\rightarrow$ $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$$= a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_0\right) x^2 + \left(-\frac{1}{4} a_0 - \frac{1}{4} a_1\right) x^3 + \dots$$

$$= a_0 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^3 + \dots\right) + a_1 \left(x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^3 + \dots\right)$$

نکته: اگر $x = x_0$ یک نقطه عادی معادله $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$ باشد و مسأله جواب معادله را حول $x = x_0$ بخواهد، می‌توان با تعویض متغیر $t = x - x_0$، مسأله را به یک معادله مرتبه دوم جدیدی برحسب متغیر مستقل $t$ نوشت که $t = 0$ یک نقطه عادی آن است و سپس جواب معادله جدید را حول $t = 0$ می‌توان نوشت.

(تذکر: در این صورت، $y'(x) = \frac{dy}{dt} = \bar{y}'(t)$ و $y''(x) = \frac{d^2 y}{dt^2} = \bar{y}''$ (

$x = t + x_0$

مثال: جواب معادله زیر را به صورت یک سری توانی حول $x = 1$ بنویسید.

$$y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1) y = 0$$

با تعویض متغیر $t = x - 1$ داریم:

$$\bar{y}''(t) + t^2 \bar{y}'(t) - 4t \bar{y}(t) = 0 \quad (*)$$

$\begin{cases} p(t) = t^2 \\ q(t) = -4t \end{cases}$ هردو در $t = 0$ تحلیلی اند $\leftarrow$ $t = 0$ یک نقطه عادی معادله جدید $(*)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$ 1

جواب $(*)$: $\bar{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

$$\bar{y}'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \qquad \bar{y}''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

$\leftarrow$ در معادله $(*)$ قرار می‌دهیم

پس از جایگذاری و ساده کردن، … $\rightarrow$

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+3)(n+2) a_{n+3} + (n-4) a_n\right) t^{n+1} = 0$$

Soroush

$$2a_2 = 0 \longrightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$(n+3)(n+2)\,a_{n+3} + (n-4)\,a_n = 0 \qquad n = 0,1,2,3,\dots$$

$$\longrightarrow \quad a_{n+3} = \frac{-(n-4)}{(n+3)(n+2)}\,a_n \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$a_3 = \frac{2}{3}a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{4}a_1 \quad , a_5 = 0 , \; a_6 = \frac{1}{45}a_0 , \dots$$

در ① قرار میدهیم

$$\longrightarrow \quad \bar{y}(t) = a_0\left(1 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{45}t^6 + \dots\right) + a_1\left(t + \frac{1}{4}t^4\right)$$

$$\underset{=}{t=x-1} \;\; \dots\dots \; = y(x) \checkmark$$

تذکر: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}$ قسمت توانی یکسان نیست و ۱ واحد اختلاف دارند.

جمله اول سری با توان کوچکتر را بیرون میکشیم.

$$a_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}_{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}} \qquad n \to n+1$$

$$= a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} + b_n)\, x^{n+1}$$

تذکر ۲: اگر اختلاف بیشتر باشد مثلاً ۲ واحد، دو جمله اول سری با توان کوچکتر را بیرون می‌کشیم و به همین ترتیب برای سایر حالت ها.

(ب) جواب به صورت سری در مجاورت یک نقطه تکین منظم:

فرض کنید $x=0$ یک نقطه تکین منظم معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (۱) باشد، در این صورت می‌توان جواب معادله را به صورت یک سری توانی در یک همسایگی محذوف $x=0$ نوشت.

برای این کار، ابتدا معادله شاخص زیر را تشکیل داده و ریشه‌های آن را تعیین می‌کنیم:

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0$$

$$p_0=\lim_{x\to 0} xp(x) \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x)$$

$(r_1, r_2 \in \mathbb{R})$

فرض کنید $r_1$ و $r_2$ و $r_2 \leq r_1$ در این صورت:

جواب: $y(x)=c_1y_1+c_2y_2$ : در بالا

قضیه: (روش فروبنیوس): با مفروضات بالا، یک جواب $y_1(x)$ برای معادله (۱) به صورت زیر است:

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0\neq 0$$

($a_n$ ها با جایگذاری $y_1$ در معادله تعیین می‌شوند)

و برای جواب $y_2(x)$ مستقل با $y_1(x)$ داریم:

حالت الف: اگر $r_1-r_2\notin\mathbb{Z} \rightarrow y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \ b_0\neq 0$

($b_n$ ها با جایگذاری $y_2$ در معادله تعیین می‌شوند)

حالت ب: اگر $r_1-r_2=0 \rightarrow y_2(x)=y_1(x)\ln x+x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad b_0\neq 0$

حالت ج: اگر $r_1-r_2\in\mathbb{Z}^+=\mathbb{N} \rightarrow y_2(x)=cy_1(x)\ln x+x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ که $b_0\neq 0$

اگرچه در ب و ج می‌توان $b_n$ ها را با جایگذاری $y_2$ در معادله تعیین کرد ولی با روش کاهش مرتبه (فرمول آبل) تعیین $y_2$ ساده‌تر است.

$$y_2=y_1\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx}\, dx$$ (فرمول آبل)

مثال : جواب معادلات زیر را در مجاورت $x=0$ بدست آورید.

① $2x^2y'' + xy' - (x+1)y = 0$

ابتدا باید وضعیت $x=0$ را بررسی کنیم (تکین، منظم یا غیرمنظم، عادی ...) و بنویسیم.

$$p(x) = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x} \rightarrow$$ در $x=0$ تحلیلی نیست $\rightarrow$ پس نقطه تکین

$$q(x) = \frac{-(x+1)}{2x^2} \rightarrow$$ در $x=0$ تحلیلی نیست

لذا $x=0$ یک نقطه تکین است.

$$(x-0)p(x) = x\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2}$$
$$(x-0)^2q(x) = x^2\left(\frac{-(x+1)}{2x^2}\right) = -\frac{(x+1)}{2}$$

$\rightarrow$ هردو در $x=0$ تحلیلی اند $\rightarrow$ $x=0$ تکین منظم

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\,p(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

معادله شاخص : $r^2 + (p_0-1)r + q_0 = 0$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-(x+1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow r^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)r - \frac{1}{2} = 0$$

$$\rightarrow r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2r^2 - r - 1 = 0 \rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

طبق روش فروبنیوس حالت الف :

$$y_1(x) = x^{\overset{r_1=1}{r_1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y_2(x) = x^{\overset{r_2=-\frac{1}{2}}{r_2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \quad a_0 \neq 0 \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} \quad b_0 \neq 0$$

$\vdots$

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \quad , \quad h''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

تذکر: در حالت (الف) چون هر دو جواب $y_1$ و $y_2$ از شکل کلی $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ پیروی می‌کنند پس کافیست در معادله، به جای $y(x)$، $h(x)$ را جایگذاری و روابط بین $c_n$ ها برحسب $n$ و $r$ به دست بیاید، سپس،
یکبار $r=r_1 \leftarrow$ $a_n$ ها محاسبه  بار دیگر $r=r_2 \leftarrow$ $b_n$ ها محاسبه

$$h'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$h''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

ادامه مثال قبل:

$h$ و $h'$ و $h''$ را در معادله به جای $y$ و $y'$ و $y''$ جایگذاری می‌کنیم:

$(2x^2y''+xy'-xy-y=0$ در معادله$)$

$$2x^2y''+xy'-(x+1)y=0$$

$$\underbrace{2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}}_{\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r}}+\underbrace{x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}}_{\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}}$$

$$\underbrace{-x\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}}_{-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+1}}\underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}}_{-\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}c_n x^{n+r}}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\{2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1\}c_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+1}=0$$

اختلاف یک واحد

$$\xrightarrow[x^r]{\text{فاکتور از}} x^r\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+r-1)(2n+2r+1)\}c_n x^{n}}-\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}c_n x^{n+1}\Big)=0$$

جمله اول سری با توان کمتر را بیرون می‌کشیم

$$(r-1)(2r+1)c_0+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)(2n+2r+1)c_n x^n}$$

$$\downarrow \quad n\to n+1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1}x^{n+1}$$

Subject:

Year : Month : Day : ( ) page : ( )

$$\Rightarrow (r-1)(2r+1)c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1} - c_n\} x^{n+1} = 0$$

$$(r-1)(2r+1)c_0 \xrightarrow{c_0 \neq 0} r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$(n+r)(2n+2r+3)c_{n+1} - c_n = 0 \quad , n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

① : $r = r_1 = 1$ : $$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+5)} \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0 \rightarrow a_1 = \frac{1}{5} a_0$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{14} a_1 = \frac{1}{14} \times \frac{1}{5} a_0 = \frac{1}{70} a_0$$

$\vdots$

② : $r = r_2 = \frac{-1}{2}$ $$b_{n+1} = \frac{b_n}{(n-\frac{1}{2})(2n+2)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0 \rightarrow b_1 = -b_0$$

$$n = 1 \rightarrow b_2 = \frac{1}{2} b_1 = \frac{-1}{2} b_0$$

$\vdots$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$$

$$= a_0 x + \frac{1}{5} a_0 x^2 + \frac{1}{70} a_0 x^3 + \dots$$

$$= a_0 \left(x + \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{70} x^3 + \dots\right)$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} = b_0 x^{-\frac{1}{2}} + b_1 x^{\frac{1}{2}} + b_2 x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$= b_0 x^{-\frac{1}{2}} - b_0 x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} b_0 x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$= b_0 \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + \dots\right)$$

جواب عمومی : $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

② $xy''+y'-4y=0 \rightarrow$ (؟) نقطه تکین منظم $x=0$

$\rightarrow$ معادله شاخص: $r^2+(p_0-1)r+q_0=0$

$$\rightarrow p_0=\lim_{x\to 0} xp(x)=\lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

$$\rightarrow q_0=\lim_{x\to 0} x^2 q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{-4}{x}\right)=0$$

$$\rightarrow r^2+(1-1)r+0=0 \rightarrow r^2=0 \rightarrow r_1=r_2=0$$

$\rightarrow r_1-r_2=0 \rightarrow$ حالت (ب)

$$y_1=x^{\overset{=0}{r_1}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$y_1$ با جایگذاری در معادله تعیین می‌شود.

$a_0$ و $b_0\neq 0$

$y_2(x)=y_1\ln x+x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \rightarrow$ با فرمول آبل!

گام اول: تعیین $y_1$

$$x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}}_{n\to n+2}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{n\to n+1}-4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$(a_1-4a_0)+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)a_{n+1}-4a_n\right)x^n}_{n\to n+1}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\boxed{x^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)a_{n+1}-4a_n\right)x^n=0$$

$$\rightarrow (a_1-4a_0)+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)a_{n+2}-4a_{n+1}\right\}x^{n+1}=0$$

$$\begin{cases} a_1 - 4a_0 = 0 \longrightarrow \boxed{a_1 = 4a_0} \\ (n+2)^2 a_{n+2} - 4a_{n+1} = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1}}{(n+2)^2} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} n = 0 \longrightarrow a_2 = \frac{4a_1}{4} = a_1 = 4a_0 \\ n = 1 \longrightarrow a_3 = \dots \end{cases}$$

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$= a_0 + 4a_0 x + 4a_0 x^2 + \dots$$
$$= a_0 (1 + 4x + 4x^2 + \dots)$$

(دلخواه) $\underset{\neq 0}{a_0} = 1$ با انتخاب $= 1 + 4x + 4x^2 + \dots$

( تذکر: در حالت تعیین منظم (روش فروبنیوس) می‌توان $a_0 = 1$ و $b_0 = 1$ اختیار کرد. )

گام دوم: تعیین $y_2$ : (با فرمول آبل)

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx} \, dx$$

$$y_1^2 = (1 + 4x + 4x^2 + \dots)(1 + 4x + 4x^2 + \dots)$$

$$= 1 + (4+4)x + (4+16+4)x^2 + \dots$$
$$= 1 + 8x + 24x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{1 + 8x + 24x^2 + \dots}$$ در $x = 0$ تحلیلی پس می‌توان نوشت (شرط تیلور) $= K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \dots$

طرفین وسطین $\Longrightarrow \quad 1=(1+8x+24x^2+\dots)(K_0+K_1x+K_2x^2+\dots)$

$$\Rightarrow 1 = K_0+(K_1+8K_0)x+(K_2+8K_1+24K_0)x^2+\dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{K_0=1} \\ K_1+8K_0=0 \rightarrow \boxed{K_1=-8} \\ K_2+8K_1+24K_0=0 \rightarrow \boxed{K_2=40} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y_1^2}=1-8x+40x^2-\dots$$

تذکر: اگر فرض $\dfrac{1}{y_1^2}=\dfrac{1}{x^2+8x^3+24x^4+\dots}$ در $x=0$ تحلیلی نیست

$$=\frac{1}{x^2(1+8x+24x^2+\dots)}$$ در $x=0$ تحلیلی نیست

$$\rightarrow e^{-\int \frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=x^{-1}=\frac{1}{x}$$

$$y_2=y_1\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)\,dx}\,dx$$

$$=y_1\int (1-8x+40x^2)\frac{1}{x}\,dx$$

$$=y_1\int\left(\frac{1}{x}-8+40x+\dots\right)dx$$

$$\boxed{=y_1(\ln x-8x+20x^2+\dots)}$$

ادامه ...
(از کجا حاکمیم)

جواب عمومی : $y(x)=c_1y_1+c_2y_2$

(۳) $xy'' + 3y' - y = 0$ $\qquad$ $x=0$ نقطه‌ی تکین منظم (؟) را داریم :

معادله شاخص : $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x p(x) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}\right) = 3$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\to r^2 + 2r = 0 \to r(r+2) = 0 \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

$$r_1 - r_2 = 2 \in \mathbb{N}$$

پس طبق حالت ۳ :

$$y_1(x) = x^{\overset{=0}{r_1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = c y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad , \quad b_0 \neq 0$$

$y_2$ با روش کاهش مرتبه بدست می‌آوریم

$y_1$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم :

$$y_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری در معادله $\longrightarrow$

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{n \to n+1} - \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\to \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{n \to n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(3(n+1) a_{n+1} - a_n\right) x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( 3(n+1)a_{n+1} - a_n \right) x^{n} = 0$$

$$3(a_1 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 3(n+1)a_{n+1} - a_n \right) x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( 3(n+2)\, a_{n+2} - a_{n+1} \right) x^{n+1} \qquad n \to n+1$$

$$\to (3a_1 - a_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1)\, a_{n+2} + 3(n+2)\, a_{n+2} - a_{n+1} \right\} x^{n+1} = 0$$

$$3a_1 - a_0 = 0 \to a_1 = \frac{1}{3} a_0 \xrightarrow[\text{انتخاب}]{\boxed{a_0 = 1}} a_1 = \frac{1}{3}$$

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + 3(n+2)\, a_{n+2} - a_{n+1} = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\to (n+2)\, a_{n+2} \left\{ n+1+3 \right\} - a_{n+1} = 0$$

$$\to a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+4)} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0 \to a_2 = \frac{a_1}{8} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow y_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 + \dots \quad \checkmark$$

$$e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

اکنون تعیین $y_2$ با فرمول آبل:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$$

$$y_1^2 = \left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \dots} \overset{\text{در } x=0 \text{ تحلیلی}}{=} k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$$

طرفین وسطین

$$\rightarrow 1 = \left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \cdots\right)\left(K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \cdots\right)$$

$$\rightarrow 1 = K_0 + \left(K_1 + \frac{2}{3}K_0\right)x + \left(K_2 + \frac{2}{3}K_1 + \frac{7}{36}K_0\right)x^2 + \cdots$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boxed{1 = K_0} \\ 0 = K_1 + \frac{2}{3}K_0 \rightarrow \boxed{K_1 = -\frac{2}{3}} \\ 0 = K_2 + \frac{2}{3}K_1 + \frac{7}{36}K_0 \rightarrow \boxed{K_2 = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{y_1^2} = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \cdots$$

$$y_2 = y_1 \int \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \cdots\right) \cdot \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$= y_1(x) \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{3x^2} + \frac{1}{4x} + \cdots\right) dx$$

$$\rightarrow y_2(x) = y_1(x)\left(\frac{-1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{4}\ln x + \cdots\right) \checkmark$$

$$= \frac{1}{4}y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(\frac{-1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \cdots\right)$$

## معادله بسل :

**تعریف :** معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ ① را که در آن $p \geq 0$ عددی ثابت است معادله بسل از مرتبه $p$ می نامند.

با توجه به ① ، $p(x) = \frac{1}{x}$ و $q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$

بنابراین $x = 0$ یک نقطه تکین منظم معادله ① است.

درنتیجه طبق نتایج بدست آمده از روش فروبنیوس ، برای $x > 0$ حالت های زیر را داریم:

ریشه های معادله شاخص $\begin{pmatrix} r_1 = p \\ r_2 = -p \end{pmatrix}$

**حالت ① :** $p \notin \mathbb{Z}$
$$\begin{cases} y_1(x) = J_p(x) & \text{تابع بسل مرتبه } p \\ y_2(x) = J_{-p}(x) & \text{تابع بسل مرتبه } -p \end{cases}$$

ولذا :

جواب عمومی ① : $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

**حالت ② :** $p = 0$
$$\begin{cases} y_1(x) = J_0(x) \\ y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$
با فرمول آبل

$$\rightarrow y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

**حالت ③ :** $p \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} y_1(x) = J_p(x) \\ y_2(x) = c y_1(x) \ln x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$
با فرمول آبل

$$\rightarrow y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

**تعریف :** (تابع بسل نوع اول از مرتبه $p$) :

این تابع برای $p \geq 0$ و $x > 0$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

تابع گاما

نتیجه: $J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$

تعریف: (تابع بسل نوع دوم از مرتبه P):

به هر جواب معادله بسل (۱) که با $y_1(x) = J_p(x)$ مستقل خطی باشد
بسل نوع دوم می‌گویند و معمولاً با $Y_p(x)$ نمایش می‌دهند.

کاربرد زیاد

حالت‌های خاص ($J_0(x)$ , $J_1(x)$):

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{64} - \dots$$

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = x - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \dots$$

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید.

① $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{9}{4})y = 0$

$\to p^2 = \frac{9}{4} \to p = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ معادله بسل از مرتبه

طبق حالت ①:

جواب عمومی $y(x) = C_1 J_{\frac{3}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{3}{2}}(x)$

② $xy'' + y' + xy = 0$

روش اول: $x=0$ نقطه تکین منظم ← روش فروبنیوس

روش دوم: طرفین در $x$ ضرب شود: $\to p^2 = 0 \to p = 0$

$x^2y'' + xy' + (x^2 - 0^2)y = 0$ معادله بسل مرتبه $p=0$

طبق حالت ②: $y_1(x) = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \dots$

$$y_2(x) \overset{\text{با فرمول}}{\underset{\text{آبل}}{=}} y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)dx}\, dx$$

$$y_1^2 = \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \dots\right) = 1 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right)x^4$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{32}x^4 - \dots$$

در $x=0$ تحلیلی

$$\frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{32}x^4 - \dots} = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1 = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{32}x^4 - \dots\right)\left(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots\right)$$

$$\to 1 = k_0 + k_1 x + \left(k_2 - \frac{1}{2}k_0\right)x^2 + \left(k_3 - \frac{k_1}{2}\right)x^3 + \dots$$

$$\to \begin{cases} k_0 = 1 \\ k_1 = 0 \\ k_2 - \frac{1}{2}k_0 = 0 \to k_2 = \frac{1}{2} \\ k_3 - \frac{k_1}{2} = 0 \to k_3 = 0 \\ \vdots \\ k_4 = \frac{5}{32} \end{cases} \quad \to \frac{1}{y_1^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{32}x^4 + \dots$$

با فرمول آبل

$$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{32}x^4 + \dots\right) e^{-\int \frac{1}{x}dx}\, dx \qquad \to \dots = \frac{1}{x}$$

$$= y_1(x)\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{32}x^3 + \dots\right) dx$$

$$= y_1(x)\left(\ln x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{128}x^4 + \dots\right)$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی $= y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = ??$

تمرین: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0 \qquad p^2 = p = 1 \in \mathbb{N}$

نکته: در برخی موارد می‌توان با تعویض متغیرهای مناسب معادله را به نوع بسل تبدیل کرد

مثال: با تغییر متغیرهای داده شده، معادلات زیر را حل کنید:

① $x^4 y'' + x^3 y' + y = 0 \quad , \quad t = \frac{1}{x}$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x}\right)^2 = -t^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -t^2 \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(-t^2 \frac{dy}{dt}\right) \cdot \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{-t^2}$$

$$= -\left(2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-t^2\right) = 2t^3 \frac{dy}{dt} + t^4 \frac{d^2y}{dt^2}$$

در معادله قرار میدهیم

$$\longrightarrow \underbrace{x^4}_{\frac{1}{t^4}}\left(2t^3 \frac{dy}{dt} + t^4 \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \underbrace{x^3}_{\frac{1}{t^3}}\left(-t^2 \frac{dy}{dt}\right) + y = 0$$

$$\longrightarrow \frac{2}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + y = 0$$

معادله بسل از مرتبه $p=0$ در مثال قبل حل شد!

$$\longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + y = 0 \xrightarrow[t^2]{\text{ضرب در}} t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + t^2 y = 0$$

② $x^2 y'' + x y' + \left(4x - \frac{9}{64}\right) y = 0 \qquad t = 4\sqrt{x} \rightarrow x = \left(\frac{t}{4}\right)^2 = \frac{t^2}{16}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{t/4} = \frac{8}{t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{8}{t} \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d(y')}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{8}{t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{8}{t}$$

$$= \left(-\frac{8}{t^2} \frac{dy}{dt} + \frac{8}{t} \frac{d^2y}{dt^2}\right) \cdot \frac{8}{t} = -\frac{64}{t^3} \frac{dy}{dt} + \frac{64}{t^2} \frac{d^2y}{dt^2}$$

در معادله قرار میدهیم

$$\longrightarrow x^2\left(-\frac{64}{t^3} \frac{dy}{dt} + \frac{64}{t^2} \frac{d^2y}{dt^2}\right) + x\left(\frac{8}{t} \frac{dy}{dt}\right) + \left(4\left(\frac{t^2}{16}\right) - \frac{9}{64}\right) y = 0$$

$$\longrightarrow \left(-\frac{t}{4} \frac{dy}{dt} + \frac{t^2}{4} \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{t}{2} \frac{dy}{dt} + \left(\frac{t^2}{4} - \frac{9}{64}\right) y = 0$$

$$\longrightarrow \frac{t^2}{4}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{t}{4}\frac{dy}{dt}+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{9}{64}\right)y=0$$

$$\xrightarrow{\text{در ۴ ضرب}} t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-\frac{9}{16}\right)y=0$$ $\frac{9}{16} \to p^2$

معادله بسل از مرتبه $p=\frac{3}{4}\notin Z$ طبق حالت ① :

جواب عمومی $\bar{y}(t)=c_1J_{\frac{3}{4}}(t)+c_2J_{-\frac{3}{4}}(t)$ ✓

$$\xrightarrow{t=4\sqrt{x}} c_1J_{\frac{3}{4}}(4\sqrt{x})+c_2J_{-\frac{3}{4}}(4\sqrt{x})=y(x)$$ همان

تمرین: ③ $4x^2y''+4xy'+\left(x-\frac{4}{25}\right)y=0$ $\quad t=\sqrt{x}$

معادله بسل پارامتری: به شکل $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-p^2)y=0$ ① که $\lambda>0$ پارامتری ثابت است. با تعویض متغیر $t=\lambda x$ معادله ① به معادله بسل زیر تبدیل می‌شود:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-p^2)y=0 \longrightarrow$$ که راه حل آن را می‌شناسیم.

مثال: $4x^2y''+4xy'+(8x^2-1)y=0$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} x^2y''+xy'+\left(2x^2-\tfrac{1}{4}\right)y=0$$

بسل پارامتری با: $\lambda^2=2 \longrightarrow \lambda=\sqrt{2}$

← با تعویض متغیر $t=\lambda x=\sqrt{2}x$ داریم: $p^2$

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)y=0$$

بسل مرتبه $p=\frac{1}{2}\notin Z$ ← حالت ①:

جواب عمومی: $c_1J_{\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(t)$ ✓

$$\xrightarrow{t=\sqrt{2}x} c_1J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)=y(x)$$

Subject:
Year: Month: Day: page: ( )

برخی ویژگی های توابع بسل:

$$① \ \frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p J_{p-1}(x) \rightarrow ③ \ x^p J_p(x) = \int x^p J_{p-1}(x)\,dx$$

$$② \ \frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_p(x)\right) = -x^{-p} J_{p+1}(x) \rightarrow ④ \ x^{-p} J_p(x) = -\int x^{-p} J_{p+1}(x)\,dx$$

$$⑤ \ J_p'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)\right)$$

$$⑥ \ J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$$

معادله لژاندر: ← امتحان نیست

تعریف: به شکل $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ که $p$ عددی حقیقی و ثابت

$x=0$ یک نقطه عادی معادله است و لذا برای $-1<x<1$، جواب عمومی آن:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \dots$$

$$= a_0 \underbrace{\left(1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \dots\right)}_{y_1(x)}$$

ثابت های دلخواه

$$+ a_1 \underbrace{\left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \dots\right)}_{y_2(x)}$$

چند جمله ای های لژاندر برای $n=0,1,2,4,\dots$ به شکل زیر هستند:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}$$

که برای $p=n$، $y_1(x)=P_n(x)$ یک جواب معادله لژاندر است یا $y_2$ با آن

که:

$$M = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ \frac{n-1}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$$

نتیجه:

$P_0(x)=1 \quad , \quad P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad , \ldots$

چند ویژگی چندجمله‌ای‌های لژاندر:

① $$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m=n \end{cases}$$

② $$P_{n+1}(x)=\frac{(2n+1)P_n(x)-nP_{n-1}(x)}{n+1} \qquad n=1,2,3,\ldots$$

③ فرمول رودریگ: $$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

Subject: ........ 
Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

«حل تمرین معادلات»

$$y' = \frac{x+y-۴}{x-y-۶}$$

$x = X + \alpha$
$y = Y + \beta$
$y' = Y'$

$$\rightarrow Y' = \frac{X+\alpha+Y+\beta+۴}{X+\alpha-Y-\beta-۶} = \frac{X+Y+\underbrace{(\alpha+\beta+۴)}_{0}}{X-Y+\underbrace{(\alpha-\beta-۶)}_{0}}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -۴ \\ \alpha-\beta = ۶ \end{cases} \qquad Y' = \frac{X+Y}{X-Y} = \frac{X(1+Y/X)}{X(1-Y/X)} \qquad u = \frac{Y}{X}$$

$$Y = uX \rightarrow Y' = u'X + u$$

$$u'X + u = \frac{1+u}{1-u} \rightarrow u'X = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{u^۲+1}{1-u}$$

$$u'X = \frac{u^۲+1}{1-u} \rightarrow \frac{1-u}{u^۲+1}\,du = \frac{dX}{X} \rightarrow \tan^{-1}u - \frac{1}{۲}\ln(u^۲+1)$$

$$= \ln X + C = \ln CX \qquad u = \frac{Y}{X} = \frac{y+۵}{x-1}$$

$$y' = 1 + \frac{1}{\sin(x-y+1)}$$

$\sin(x-y+1)$ عبارت غیرطبیعی هر وقت اینجور چیزی داریم کل آن را تغییر متغیر میدهیم.

$$u = x-y+1 \rightarrow u' = 1-y' \rightarrow y' = 1-u'$$

$$1-u' = 1+\frac{1}{\sin u} \rightarrow u' = \frac{-1}{\sin u} \Rightarrow -\sin u\,du = dx$$

$$\cos u = x + C \Rightarrow \boxed{\cos(x-y+1) = x+C}$$

TANDIS

Scanned by CamScanner

Subject: ............ Year: ........ Month: ........ Day: ........ ( )

اول فاکتور می‌گیریم که معادله شکل پیدا کند.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin\theta + e^{2r}\sin\theta}{3e^{r} + e^{r}\cos 2\theta} = \frac{\sin\theta(1+e^{2r})}{e^{r}(3+\cos 2\theta)}$$ تفکیک پذیر

$$\rightarrow \frac{e^{r}}{1+e^{2r}}\,dr = \frac{\sin\theta}{3+\cos 2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{l} u = e^{r} \\ du = e^{r}dr \end{array} \rightarrow \frac{du}{1+u^{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \tan^{-1} e^{r} = \frac{\sin\theta}{2(1+\cos^{2}\theta)}$$ تغییر متغیر

باید یک جا مثل هم باشند ساده‌ترین این است که $\cos 2\theta$ را تبدیل کنیم به $\theta$:

$$\cos 2\theta = \cos^{2}\theta - \sin^{2}\theta$$

$$= 2\cos^{2}\theta - 1 \ \checkmark$$

$$= 1 - 2\sin^{2}\theta$$

$$\xrightarrow[du = -\sin\theta d\theta]{u = \cos\theta} \frac{-du}{2(1+u^{2})} = -\frac{1}{2}\tan^{-1} u$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} e^{r} = -\frac{1}{2}\tan^{-1}(\cos\theta) + c$$

اگر $-\frac{1}{2}$ را نداشتیم می‌توانستیم از طرفین tan بگیریم و معادله ساده‌تر بشود.

$$xy' = x\tan\frac{y}{x} + y \xrightarrow[\text{تقسیم شود}]{\text{معادله بر } x} y' = \tan\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

اگر توجهان $\frac{y}{x}$ برای tan است (امکان)

تغییر متغیر می‌دهیم

$$\begin{array}{l} u = \frac{y}{x} \\ y' = u'x + u \end{array} \rightarrow u'x + u = \tan u + u$$

$$u'x = \tan u \longrightarrow \frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x} \longrightarrow \cot u\, du = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \ln(\sin u) = \ln x + c = \ln cx \Rightarrow \boxed{\sin u = cx}$$

$$x^3y''' + xy' - y = 0 \xrightarrow[\text{تعویض متغیر}]{\text{کشی - اویلر}} x = e^t \quad (\text{یا } t = \ln x)$$

$$\begin{cases} xy' = \bar{y}'(t) \\ x^3y''' = \bar{y}''' - 3\bar{y}'' + 2\bar{y}' \end{cases} \xrightarrow{\text{در معادله قرار}} (\bar{y}''' - 3\bar{y}'' + 2\bar{y}') + \bar{y}' - \bar{y} = 0$$

$$\longrightarrow \bar{y}''' - 3\bar{y}'' + 3\bar{y}' - \bar{y} = 0 \quad \text{همگن با ضرایب ثابت}$$

معادله مشخصه: $(\lambda - 1)^3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$\bar{y}_1 = e^t \qquad \bar{y}_2 = te^t \qquad \bar{y}_3 = t^2e^t$$

جواب عمومی: $c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t \xrightarrow[e^t = x]{t = \ln x} c_1x + c_2x\ln x + c_3x(\ln x)^2$

Subject: ............ reza Zadeh.Kazem@yahoo.Com

Year: ...... Month: ...... Day: ...... ( )

$$y'\cos x = 2 + 2y\sin x \xrightarrow[\cos x]{\text{طرفین تقسیم بر}} y' = \frac{2}{\cos x} + 2y\tan x$$

$$y' - 2y\tan x = \frac{2}{\cos x}$$ معادله خطی مرتبه اول

~~جلسه بعد حل کنیم.~~ $$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{\cancel{x^2+1}}\,dx$$

$$+\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \text{Arctan}\,x + C$$

معادله $(xy - 2y^2)dx + (3xy - x^2)dy = 0$ دارای عامل انتگرال ساز به شکل $x^\alpha y^\beta$ است معادله را حل کنید.

$$(x^{\alpha+1}y^{\beta+1} - 2x^\alpha y^{\beta+2})\,dx + (3x^{\alpha+1}y^{\beta+1} - x^{\alpha+2}y^\beta)\,dy = 0$$

$$(\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta - 2(\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1} = 3(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1} - (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta$$

$$\beta + 1 = -\alpha - 2 \rightarrow \alpha + \beta = -3 \rightarrow \boxed{\beta = -2}$$
$$3\alpha + 2\beta = -7 \qquad \boxed{\alpha = -1}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} (y^{-1} - 2x^{-1})\,dx + (3y^{-1} - xy^{-2})\,dy = 0$$ معادله کامل است

$$f(x,y) = \int M\,dx = \int y^{-1} - \frac{2}{x}\,dx = xy^{-1} - 2\ln x + g(y)$$

$$f_y = N \Rightarrow -xy^{-2} + g'(y) = 3y^{-1} - xy^{-2}$$

$$\rightarrow g'(y) = 3y^{-1} \rightarrow g(y) = 3\ln y \Rightarrow \boxed{-2\ln x + 3\ln y + xy^{-1} = C}$$

راه تستی برای چک کردن: در $M$ ← $y$ ها را حذف کن $-2x^{-1}$ می ماند نسبت به $x$ انتگرال بگیر به اضافه
از $N$ نسبت به $y$ انتگرال بگیر با هم جمع کن ← مساوی $C$

برنولی $y' + a(x)y = b(x)y^n$ خطی مرتبه اول $y' + a(x)y = b(x)$

عامل انتگرال ساز $\mu = e^{\int a(x)\,dx}$

$$y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu . b(x)\,dx + c\right]$$

$$y' - 2xy = 4x\sqrt{y} \qquad u = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$u' = \frac{1}{2} y' y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} y' y^{-\frac{1}{2}} - 2x\left(\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\right)y = 4xy^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$u' - xu = 2x \qquad \mu = e^{\int -x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$u = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\left[\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c\right] = e^{\frac{x^2}{2}}\left[-2e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right]$$

در معادلات برنولی و خطی مرتبه اول وقتی برحسب $\frac{dx}{dy}$ باشند تشخیص کمی سخت است که معمولاً در امتحان به این شکل سوال می دهند.

وقتی یک معادله به شکل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ داریم اول چک می کنیم کامل یا عامل انتگرال سازد

$$(1+y^2)\,dx + (x - \mathrm{Arc}\tan y)\,dy = 0$$

این معادله عامل انتگرال ساز دارد اما حل به این روش خیلی طولانی است.

$$dx + \frac{x - \mathrm{Arc}\tan y}{1+y^2}\,dy = 0 \qquad u = \mathrm{Arc}\tan y$$

$$u' = \frac{y'}{1+y^2}$$

$$\to dx + (x-u)\,du = 0 \qquad du = \frac{dy}{1+y^2}$$

$$\to \frac{dx}{du} + x = u$$ خطی مرتبه اول

هر وقت نگاه به سوال کنیم ببینیم چی داده دنبال روش بگردیم.

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$(x^2 + y\sin xy)\,dx + (x\sin xy)\,dy = 0$ چک کردن اینکه معادله کامل است یا نه زمان‌بر است.

$$x^2\,dx + \sin xy\,(\overbrace{y\,dx + x\,dy}^{d(xy)}) = 0 \qquad u = xy$$

آرگومان sin غیرطبیعی است پس تغییر متغیر می‌دهیم.

$$y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0$$

معادله را به فرم معادله کامل می‌نویسیم.

$$(y + \ln x)\,dx - x\,dy = 0$$

$1 \quad -1 \rightarrow$ کامل نیست.

① $\dfrac{N_x - M_y}{-N} = g(x)$ ② $\dfrac{N_x - M_y}{M} = g(y)$

$\downarrow$ $\downarrow$

جواب $\mu = e^{\int g(x)\,dx}$ عامل انتگرال ساز $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$

در ۲ حالت از این روش استفاده می‌کنیم: ۱- کسر ① فقط برحسب $x$ شود ۲- کسر ② فقط برحسب $y$ باشد
اگر عامل های انتگرال ساز را ضرب در معادله کنیم معادله تبدیل به یک معادله کامل می‌شود.
علامت ها را در نظر نگیریم فقط با نگاه چک کنیم کسر ① برقرار است یا ② که اینجا ① برقرار است

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$ عامل انتگرال ساز

پس $x^{-2}$ را ضرب در معادله می‌کنیم و معادله تبدیل به یک معادله کامل می‌شود.

$$x^2 y' \cos y = 2x \sin y - 1$$

تغییر متغیر می‌دهیم. داریم: $\begin{cases}\cos y \\ \sin y\,dy\end{cases}$ یا $\begin{cases}\sin y \\ \cos y\,dy\end{cases}$ هرجا

$u = \cos y \qquad u = \sin y$

نسبت به $x$ مشتق بگیریم

$u = \sin y$

$u' = y'\cos y$

حواسمان باشد!!

$du = \cos y\,dy$

Subject: ..........

Year: .......... Month: .......... Day: .......... ( )

$x^2 u' = 2x u - 1$ معادله خطی مرتبه اول $\boxed{y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x)}$

در نظر می‌گیریم که چه متغیرهایی داریم. اینجا $x$ و $y$ داریم فقط $y^1$ (نه $y^2$ نه $y^3$ ...)

پس مشتقش به اضافه تابعی برحسب $x$ ضربدر تابعی برحسب $y^1$ و طرف دوم هم فقط تابعی برحسب $x$

خطی مرتبه اول یک عامل انتگرال‌ساز دارد $e$ به توان همان ضریب $\leftarrow a(x)$

$$\mu = e^{\int a(x)\,dx}$$ عامل انتگرال‌ساز خطی مرتبه اول

جواب: $\boxed{y = \frac{1}{\mu}\left[\int b(x)\cdot \mu \, dx + c\right]}$ ضریب $y'$ باید 1 باشد

$x^2 u' - 2x u = -1 \longrightarrow$ ضریب $u'$ باید 1 باشد.

$$u' - \frac{2x}{x^2} u = \frac{-1}{x^2} \qquad \mu = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = x^{-2}$$

$$u = \frac{1}{x^{-2}}\left[\int x^{-2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) dx + c\right] = x^2\left[\frac{1}{3} x^{-3} + c\right]$$

$$\int -\frac{1}{x^4}\, dx = -\int x^{-4}\, dx = \frac{1}{3} x^{-3}$$

$$y' + y \cot x = \frac{1}{\sin x} \qquad \mu = e^{\int \cot x \, dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

$$y = \frac{1}{\sin x}\left[\int \overbrace{\sin x \cdot \frac{1}{\sin x}\, dx}^{x} + c\right] = \frac{x + c}{\sin x}$$

$$2y\, dx = (x^2 - 1)(dx - dy) \xrightarrow[dx \text{ بر}]{\text{طرفین تقسیم}}$$

تقسیم بر $x^2 - 1$:

$$2y = (x^2 - 1)(1 - y') \rightarrow 2y = (x^2 - 1) - y'(x^2 - 1)$$

$$-y' + 1 = \frac{2y}{x^2 - 1} \rightarrow \boxed{y' + \frac{2}{x^2 - 1} y = 1}$$ خطی مرتبه اول

یا اینکه اول به شکل $(\ )\,dx + (\ )\,dy = 0$ بنویسیم و بعد تشخیص دهیم.