فصل اول: «مقدمه‌ای بر جبر خطی»

تعریف: مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ را مستقل خطی گوییم هرگاه هیچ‌کدام از آنها را نتوان برحسب ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشت. در غیر این صورت وابسته خطی نامیده می‌شود.

مثلاً در $\mathbb{R}^3$ مجموعه بردارهای $\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ مستقل خطی می‌باشد اما بردارهای $\{v_1=(1,0,0), v_2=(0,1,0), v_3=(4,3,0)\}$ وابسته خطی‌اند زیرا $v_3 = 4v_1 + 3v_2$

به طور معادل اگر در رابطه‌ی $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ نتیجه شود که $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$ در این صورت $v_1, \dots, v_n$ مستقل خطی‌اند.

قضیه: در فضای $\mathbb{R}^n$ هر مجموعه با بیش از n عضو وابسته خطی است.

تعریف: مجموعه‌ی $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است هرگاه این مجموعه مستقل خطی باشد و هر عضو از فضای $\mathbb{R}^n$ را بتوان به صورت ترکیب خطی از بردارهای فوق نوشت. تعداد بردارهای مجموعه پایه را بعد فضا می‌نامیم.

۷ **رتبه یک ماتریس:** حداکثر تعداد سطرها یا ستون های مستقل خطی یک ماتریس را رتبه
۸ آن ماتریس نامیده میشود و آن را با نماد $rank(A)$ نشان میدهیم. اگر $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
۹
۱۰ آنگاه $rank(A) \leq \min\{m, n\}$

۱۱ **قضیه:** اگر $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ در اینصورت عبارات زیر معادل اند:
۱۲
الف) A وارون پذیر است.
۱۴ ب) $\det A \neq 0$.
۱۵ ج) $rank(A) = n$.
۱۶ د) دستگاه $Ax = b$ جواب منحصربفرد دارد.
۱۷ هـ) دستگاه $Ax = 0$ فقط جواب بدیهی دارد.

۱۸ **قضیه:** اگر $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس همانی باشد در اینصورت $rank(I) = n$ همچنین
۱۹ $rank(A) = rank(A^T)$.
۲۰

تعریف: ماتریس P_n را یک ماتریس جایگشت گوییم هرگاه P_n از تعویض سطرهای ماتریس همانی $I_{n \times n}$ حاصل شده باشد.

NOTE:
$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف: ماتریس A را یک ماتریس پادمتقارن گوییم هرگاه $A^T=-A$

(متقارن: $A^T=A$)

نکته: همواره درایه‌های قطری یک ماتریس پادمتقارن صفر است.

تعریف: ماتریس وارون‌پذیر A را یک ماتریس متعامد گویند هرگاه $A^{-1}=A^T$ یا $AA^T=I$

بررسی کنید که ماتریس روبرو یک ماتریس متعامد است.

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\qquad AA^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

تعریف: فرض کنید درایه‌های ماتریس A مختلط باشند در این صورت ترانهاده مزدوج A که

با A^* نمایش داده میشود و به صورت زیر تعریف میشود: $A^*=(\bar{A})^T$

تعریف: ماتریس مختلط A را یک ماتریس هرمیتی گویند هرگاه $A=A^*$.

نکته ۱: اگر ماتریس A حقیقی باشد $\bar{A}=A$ پس $A^*=A^T$ و بنابراین تعریف

هرمیتی و متقارن یکسان میشود.

NOTE:

نکته ۲: عناصر قطری هر ماتریس هرمیتی حقیقی میباشد.

مثال: بررسی کنید که ماتریس زیر یک ماتریس هرمیتی است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ 1+2i & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ 1+2i & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = A^*$$

خواص دترمینان:

فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد در این صورت:

۱) اگر همه‌ی درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس A صفر باشند آنگاه دترمینان صفر است.

۲) اگر همه‌ی درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس A مضربی از یک سطر یا ستون دیگر ماتریس A باشد دترمینان صفر است.

۳) اگر همه‌ی درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس A در عدد ثابت k ضرب شود دترمینان A نیز در k ضرب می‌شود به علاوه $\det(kA) = k^n \det(A)$

۴) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

۵) اگر جای دو سطر یا دو ستون A عوض شود در این صورت علامت دترمینان A تغییر می‌کند.

۶) اگر مضربی از یک سطر یا ستون ماتریس A به سطر یا ستون دیگر اضافه شود دترمینان تغییر نمی‌کند.

۷) اگر A یک ماتریس قطری یا بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد، آنگاه $\det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

۸) اگر A یک ماتریس متعامد باشد، نشان دهید دترمینان A، ۱ یا ۱- است.

$$A^{-1}=A^{T} \;;\; AA^{-1}=I \Rightarrow AA^{T}=I \Rightarrow \det(AA^{T})=\det(I)=1$$

$$\Rightarrow \det(A)\det(A^{T})=1 \Rightarrow \det^{2}(A)=1 \Rightarrow \det(A)=1 \text{ یا } \det(A)=-1$$

$$\det(A)=\det(A^{T})$$

نرم های برداری:

یک نرم در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ تابعی است که به هر $x\in\mathbb{R}^n$ عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ را نسبت میدهد که در خواص زیر صدق میکند: $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{+}$

۱) $\forall x\in\mathbb{R}^n \;;\; \|x\|\geq 0 \;,\; \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0=(0,\dots,0)$

۲) $\forall \alpha\in\mathbb{R} \;;\; \|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

۳) $\forall x,y\in\mathbb{R}^n \;;\; \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

معرفی برخی نرم های برداری:

الف) نرم دو یا نرم اقلیدسی:

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{T}\in\mathbb{R}^n \;;\; \|x\|_2=(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}=(x^{T}.x)^{1/2}$$

تمرین: نشان دهید نرم دو یک نرم برداری است. حل: بررسی خواص نرم

خاصیت اول: $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{T}\in\mathbb{R}^n$

NOTE:

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\geq 0 \;,\; \|x\|_2=0 \Rightarrow \underset{i=1,\dots,n}{x_i=0} \Rightarrow x=(0,\dots,0)^{T}$$

اگر $x=(0,\dots,0)^{T} \Rightarrow \|x\|_2=0$ ✓

۷ خاصیت دوم: $\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)^T$

۸ $\Rightarrow \|\alpha x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^2 x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \|x\|_2$

۹ - برای اثبات خاصیت سوم از نامساوی زیر که نامساوی کشی - شوارتز نامیده میشود استفاده می‌کنیم

۱۰ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$; $|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

۱۱ $\|x+y\|_2 \overset{?}{\leq} \|x\|_2 + \|y\|_2$

۱۲ $\|x+y\|_2^2 = (x+y)^T (x+y) = (x^T + y^T)(x+y) = x^T x + y^T y + x^T y + y^T x$

۱۳ $= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2x^T y \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2$

۱۴ $= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

۱۵

۱۶ $x \cdot y = x^T \cdot y = (x^T \cdot y)^T = y^T \cdot x$

۱۷ از نامساوی کشی شوارتز $x \cdot y \leq |x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

۱۸

۱۹

۲۰

NOTE:

جلسه سوم ۹۸/۷/۶ شنبه

ب) نرم یک یا نرم مجموع: $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

تمرین: نشان دهید نرم فوق یک نرم برداری است.

خاصیت اول: $\|x\|_1 \overset{?}{\geq} 0 \,,\, \|x\|_1 = 0 \iff x = 0$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0 \;;\; x = 0 = (x_1, \dots, x_n)^T = (0, \dots, 0)^T \Rightarrow \|x\|_1 = 0$$

$$\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \forall i \,,\, x_i = 0 \Rightarrow x = 0$$

خاصیت دوم: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \,,\, x \in \mathbb{R}^n \;;\; \|\alpha x\|_1 \overset{?}{=} |\alpha| \|x\|_1$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)^T \Rightarrow \|\alpha x\|_1 = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + \dots + |\alpha x_n|$$

$$= |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$$

خاصیت سوم: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

ج) نرم بینهایت یا ماکزیمم:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

تمرین: نشان دهید نرم فوق یک نرم برداری است.

NOTE:

خاصیت اول: $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \overset{?}{\geq} 0 \,,\, \|x\|_\infty = 0 \iff x = 0$$

$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \geq 0 \;;\; x=0=(x_1,\dots,x_n)^T = (0,\dots,0)^T \Rightarrow \|x\|_\infty = 0$

$\|x\|_\infty = 0 \Longrightarrow \forall i \;;\; x_i = 0 \longrightarrow x = 0$

خاصیت ۲: $\forall \alpha\in\mathbb{R},\; x\in\mathbb{R}^n : \|\alpha x\|_\infty \overset{?}{=} |\alpha|\,\|x\|_\infty$

$\|\alpha x\|_\infty = \max|\alpha x_i| = |\alpha|\max|x_i| = |\alpha|\,\|x\|_\infty$

خاصیت سوم: $\forall x,y\in\mathbb{R}^n : \|x+y\|_\infty \overset{?}{\le} \|x\|_\infty+\|y\|_\infty$

$\|x+y\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i+y_i| \le \max_{1\le i\le n}(|x_i|+|y_i|)$

$\le \max_{1\le i\le n}|x_i| + \max_{1\le i\le n}|y_i| = \|x\|_\infty+\|y\|_\infty$

مثال: برای بردار زیر مطلوب است محاسبه نرم های ۱، ۲ و ∞

$x=(2,-3,1,-1)^T$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{4+9+1+1} = \sqrt{15}$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = 7$

$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le 4}|x_i| = 3$

نکته: نرم های بیان شده در مثال حالت خاصی از نرم کلی تر به نام نرم p می باشد.

NOTE:

$\|x\|_p = \left(|x_1|^p+|x_2|^p+\dots+|x_n|^p\right)^{1/p}$

واضح است که اگر $p=1$ نرم یک حاصل می‌شود و برای $p=2$ نرم دو حاصل می‌آید

بعداً نشان خواهیم داد اگر $p \to \infty$ نرم بینهایت حاصل می‌شود.

قضیه: برای هر بردار $x=(x_1,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ رابطه زیر برقرار است

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$$

اثبات: فرض کنیم $|x_j| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i| = |x_j| = \left(|x_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(|x_1|^p+\dots+|x_n|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p$$

$$\leq \left(|x_j|^p+|x_j|^p+\dots+|x_j|^p+\dots+|x_j|^p\right)^{1/p} = \left(n|x_j|^p\right)^{1/p}$$

چون x_j ها max

$$= n^{1/p}\left(|x_j|^p\right)^{1/p} = n^{1/p}|x_j| = n^{1/p}\|x\|_\infty$$

نتیجه ۱: در بین p-نرم ها، نرم بینهایت کوچکترین نرم میباشد. $\|x\|_\infty$

نتیجه ۲:

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty}\|x\|_p \leq \lim_{p\to\infty} n^{1/p}\|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$$

قضیه: فرض کنیم تابع نرم $\|\;\|$ یک نرم برداری در فضای $\mathbb{R}^n$ باشد در این صورت این

NOTE:

تابع یک تابع پیوسته است.

اثبات: ابتدا نشان میدهیم $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ رابطه زیر برقرار است:

$$\|x-y\| \geq \big|\|x\|-\|y\|\big|$$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

$$\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

با تعویض نقش x و y در رابطه فوق،

$$\Rightarrow \|x-y\| \geq \|y\|-\|x\| \Rightarrow -\|x-y\| \leq \|x\|-\|y\|$$

$$\Rightarrow -\|x-y\| \leq \|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$$

$$\Rightarrow \big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

حال با استفاده از رابطه فوق نشان میدهیم تابع نرم پیوسته است برای اینکار باید نشان دهیم:

$f(x)=\|x\|$; $\forall \varepsilon>0;\ \exists \delta>0;\ \|x-y\|<\delta \Rightarrow \big|\|x\|-\|y\|\big|<\varepsilon$

کافیست قرار دهیم $\delta=\varepsilon$ زیرا

اگر $\|x-y\|<\delta=\varepsilon \Rightarrow \big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \big|\|x\|-\|y\|\big| < \varepsilon$$

NOTE: قضیه (معادل بودن نرم ها در فضای $\mathbb{R}^n$): فرض کنید $M(x)$ و $N(x)$ دو نرم دلخواه در

فضای $\mathbb{R}^n$ باشند در این صورت اعداد حقیقی $\alpha, \beta > 0$ وجود دارند به طوریکه

$$\alpha M(x) \le N(x) \le \beta M(x)$$

تعمیم: برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ داریم

"روابط هم ارزی نرم بینهایت با نرمهای یک و دو"

الف) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

ب) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

اثبات: از قضیه قبل برای الف قرار میدهیم $p=1$ و برای ب قرار میدهیم $p=2$.

تمرین: نشان دهید برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ رابطه زیر برقرار است.

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$$

تمرین: فرض کنید A یک ماتریس معکوس پذیر و $\|\cdot\|_v$ یک نرم برداری دلخواه باشد.
تعریف می کنیم $\|x\|_* = \|Ax\|_v$
نشان دهید $\|\cdot\|_*$ یک نرم برداری در $\mathbb{R}^n$ است.

NOTE:

جلسه چهارم ۹۸/۷/۸ درس

تعریف: دنباله‌ای از بردارهای $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ در نرم برداری $\|\cdot\|_v$ به بردار x همگرا است

هرگاه $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)}-x\| = 0$.

قضیه: همگرایی دنباله بردارهای $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ مستقل از نرم برداری است. (یعنی اگر در یک

نرم همگرا باشد در بقیه نرم‌ها نیز همگرا است.)

اثبات: فرض کنیم $M(x)$ و $N(x)$ دو نرم برداری دلخواه باشند و دنباله‌ی $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$

در نرم $M(x)$ همگرا باشد یعنی $\lim_{k\to\infty} M(x^k-x)=0$

می‌خواهیم نشان دهیم در نرم $N(x)$ نیز همگرا است. مثلاً نشان دهیم هر دو نرم در فضای $\mathbb{R}^n$

همه‌ی نرم‌ها معادل‌اند.

$\exists \alpha,\beta>0 \; ; \; \alpha M(x) \leq N(x) \leq \beta M(x)$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \alpha M(x^{(k)}-x) \leq \lim_{k\to\infty} N(x^k-x) \leq \lim_{k\to\infty} \beta M(x^k-x)$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} N(x^k-x)=0$

قضیه: فرض کنید $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ ، $x^{(k)}=(x_1^k,x_2^k,\dots,x_n^k)^T$

در این صورت $x^{(k)} \to x$ اگر و فقط اگر

$x_j^{(k)} \to x_j \quad \forall j$

NOTE:

$$\left(\|x^{(k)} - x\|_v \to 0 \iff x_j^{(k)} \xrightarrow[\forall j]{} x_j \right)$$

اثبات: حکم مسئله فوق همگرا است بنابراین در هر نرم از جمله نرم بینهایت همگرا است

یعنی
$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|_\infty = 0 = \lim_{k\to\infty} \left(\max_{j} |x_j^{(k)} - x_j| \right) = 0$$

$$x_j^{(k)} \xrightarrow[\forall j]{} x_j$$

نرم های ماتریسی: یک تابع مانند $\|.\|$ یک نرم ماتریسی نامیده میشود هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \|A\| \geq 0 , \|A\| = 0 \iff A = 0$

۲) $\forall \alpha \in \mathbb{R} , A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

۳) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

از مهمترین نرم های ماتریسی میتوان به نرم های القایی اشاره نمود که در زیر معرفی میشود.

نرم های القایی ماتریس: فرض کنید $\|.\|_v$ یک نرم برداری باشد در اینصورت نرم ماتریسی القا شده توسط این نرم برداری به صورت زیر تعریف میشود:

NOTE:
$$\|A\|_v = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$
بردار

مثال: آیا تعریف فوق یک نرم ماتریسی میباشد؟

نشان میدهیم که هر سه خاصیت نرم ماتریسی برقرار است.

خاصیت اول: $\|Ax\|_2 \geq 0 \;;\; \|x\|_2 \geq 0 \Rightarrow \|A\|_2 = \max \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq 0$

اگر ; $\|A\|_2 = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\|A\|_2 = 0 \Rightarrow \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0 \;;\; \|Ax\|_2 = 0$$

$\Rightarrow \forall x \neq 0 \;;\; Ax = 0$ اگر A وارون پذیر نباشد $\Rightarrow \exists x \neq 0 \;;\; Ax = 0$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ درایه‌های ستون اول $= 0$ ، درایه‌های ستون دوم $= 0$ ، $\vdots$ ، درایه‌های ستون n ام $= 0$ $\Rightarrow$ $x = e_1$ ، $x = e_2$ ، $\vdots$ ، $x = e_n$ $\Rightarrow A = 0$

اگر $A = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2 = 0 \Rightarrow \|A\|_2 = 0$

خاصیت دوم: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \,,\, A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \|\alpha A\|_2 \stackrel{?}{=} |\alpha| \, \|A\|_2$

$$\|\alpha A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|\alpha AX\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \neq 0} \frac{|\alpha| \, \|Ax\|_2}{\|x\|_2} = |\alpha| \, \|A\|_2$$

طبق نرم برداری

NOTE:

خاصیت سوم : $\|A+B\|_v \overset{?}{\leq} \|A\|_v + \|B\|_v$

$$\|A+B\|_v = \max_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v}$$

خاصیت سوم نرم بردار

$$\leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\|_v + \|B\|_v$$

$$\|A\|_v = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{x\neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|_v} \right\|_v = \max_{\|y\|_v=1} \|Ay\|_v$$

$0<\alpha = \frac{1}{\|x\|_v}$

$$y = \frac{x}{\|x\|_v} \Rightarrow \|y\|_v = \left\| \frac{x}{\|x\|_v} \right\|_v = \frac{1}{\|x\|_v} \|x\|_v = 1$$

تعریف دیگر : $\|A\|_v = \max_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v$

NOTE:

جلسه پنجم ۹۸,۷,۱۳ شنبه

خواص دیگر نرم های ماتریسی القایی :

خاصیت اول : $\underbrace{\|Ax\|_v}_{\text{نرم برداری } v} \le \underbrace{\|A\|_v}_{\text{نرم ماتریسی القا شده}} \underbrace{\|x\|_v}_{\text{نرم برداری } v}$: $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

اثبات : $\|A\|_v = \max\limits_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$

اگر $x=0$ رابطه فوق بدیهی است پس فرض کنیم $x\neq 0$

$\underbrace{\|A\|_v \geq \dfrac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}}_{\text{برای هر } x\neq 0 \text{ داریم}} \Rightarrow \forall x\neq 0 ;\ \|Ax\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$

خاصیت دوم : (زیرضربی) $\|AB\|_v \leq \|A\|_v \|B\|_v$: $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

نرم های القایی در خاصیت زیرضربی صدق میکنند.

$\|AB\|_v = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|(AB)x\|_v}{\|x\|_v} = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|A(Bx)\|_v}{\|x\|_v} \overset{\text{خاصیت اول}}{\leq} \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|A\|_v \|Bx\|_v}{\|x\|_v}$

$\overset{\text{خاصیت اول}}{\leq} \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|A\|_v \|B\|_v \|x\|_v}{\|x\|_v} = \|A\|_v \|B\|_v$

دقت شود محاسبه ی نرم بینهایت و نرم یک از روابط فوق کار ساده ای نمی باشد.
در قضیه زیر فرمول ساده تری برای محاسبه ی عبارت ها فوق بیان میکنیم.

قضیه: فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ دراینصورت:

الف) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

ب) $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

مثال:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 8 \\ 8 \\ 9 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 9 & 8 & 8 \end{array} \end{array}$$

$\|A\|_\infty = \max\{8, 8, 9\} = 9$

$\|A\|_1 = \max\{9, 8, 8\} = 9$

اثبات الف) ابتدا نشان میدهیم: $\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \geq \|A\|_\infty$

$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$; $\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |(Ax)_i| = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|$

$\leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (۲)

حال نشان میدهیم: $\|A\|_\infty \geq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

فرض کنیم $\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$ (۱) (فرض کنیم در سطر k ام اتفاق بیفتد)

بردار $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z_j = \begin{cases} 1 & a_{kj} \geq 0 \\ -1 & a_{kj} < 0 \end{cases} \Rightarrow \|Z\|_\infty = 1 \; ; \; Z_j a_{kj} = |a_{kj}|$$

$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$; $\|AZ\|_\infty = \max_i |(AZ)_i| = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Z_j\right|$

NOTE:

$\geq \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Z_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \overset{\text{۱- فرض}}{\underset{(1)}{=}} \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$$\Rightarrow \exists z\ ;\ \|Az\|_\infty \geq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \Rightarrow \|A\|_\infty \geq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (۳)$$
$\|z\|_\infty = 1$

$$(۲),(۳) \Longrightarrow \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

اثبات ب) ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$\|A\|_1 \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \ ;\ \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=1}^n |x_j|}_{\|x\|_1=1} \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\forall x;\ \|Ax\|_1 \leq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \Longrightarrow \|A\|_1 \leq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$
$\|x\|_1 = 1$

حال نشان می‌دهیم بردار z ای وجود دارد که تساوی رابطه فوق اتفاق میفتد. برای اینکار فرض کنیم

$$\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \quad \text{(فرض می‌کنیم در ستون kام اتفاق میفتد)}$$

$$z = e_k = (0,\dots,0,\overset{\text{مولفه kام}}{1},0,\dots,0)^T \qquad \|Az\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Az)_i|$$

$$= \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \overset{(*)}{=} \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$(Az)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = a_{ik}$$

$$\Rightarrow \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

NOTE:

نتیجه: اگر $A \in R^{n\times n}$ باشد:

الف) $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$ ب) $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$

توضیح: فرض کنید $\lambda_j\ (j=1,\dots,n)$ مقادیر ویژه ماتریس A^TA باشد و $\lambda_{max}=\max_j|\lambda_j|$

در اینصورت $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$

جلسه سوم ۹۸/۷/۱۵ دوشنبه

نرم فروبنیوس: فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ در $\mathbb{R}$ باشد. در اینصورت نرم فروبنیوس A

به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n} \qquad \|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \|A\|_F=\sqrt{14}$$

مثال: نشان دهید: $\|A\|_F=\sqrt{\mathrm{trace}(A^TA)}$

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, \quad (A^TA)_{ii}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik})^T a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{trace}(A^TA)=\sum_{i=1}^{n}(A^TA)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}^2 \Rightarrow \|A\|_F=\sqrt{\mathrm{trace}(A^TA)}$$

توضیح: نرم فروبنیوس یک نرم ماتریسی است.

اثبات: NOTE: خاصیت اول: $\|A\|_F \geq 0 \ ; \ \|A\|_F=0 \Longleftrightarrow A=0$ ✓

خاصیت دوم: $\forall \alpha\in\mathbb{R}: \ \|\alpha A\|_F \overset{?}{=} |\alpha|\,\|A\|_F \ ; \ \|\alpha A\|_F=\sqrt{\sum_i\sum_j \alpha^2 a_{ij}^2}$

$= |\alpha| \, \|A\|_F$

خاصیت سوم: $\|A+B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$

$$\|A+B\|_F^2 = \left[\sum_i \sum_j (a_{ij}+b_{ij})^2\right] = \underbrace{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}_{\|A\|_F^2} + \underbrace{\sum_i \sum_j b_{ij}^2}_{\|B\|_F^2}$$

$$+ 2 \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} \quad (1)$$

فرض کنیم بردارهای x_A و x_B به صورت زیر باشند:

$$x_A = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, a_{n1}, \dots, a_{nn})^T$$

$$x_B = (b_{11}, \dots, b_{1n}, b_{21}, \dots, b_{2n}, b_{n1}, \dots, b_{nn})^T$$

$$x_A \cdot x_B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

(از نامساوی کشی شوارتز) $|x_A \cdot x_B| \leq \|x_A\|_2 \, \|x_B\|_2$

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} \leq \left(\sum \sum a_{ij}^2\right)^{1/2} \left(\sum \sum b_{ij}^2\right)^{1/2} = \|A\|_F \, \|B\|_F$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \|A+B\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 + 2\|A\|_F \|B\|_F = (\|A\|_F + \|B\|_F)^2$$

$$\Rightarrow \|A+B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$$

NOTE: تمرین: نشان دهید نرم فروبنیوس یک نرم القایی نمی‌باشد.

فرض کنیم چنین نباشد

$\exists$ نرم برداری $\|\cdot\|_v$: $\|A\|_F = \max_{\|x\|_F = 1} \|Ax\|_F$

اگر $A = I_{n\times n} \Rightarrow \|A\|_F = \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 1 \quad \times$$

$$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1$$

قضیه (هم ارزی نرم های ماتریسی) فرض کنید $M(x)$ و $N(x)$ دو نرم ماتریسی دلخواه باشند

در اینصورت این دو نرم هم ارزند یعنی $\exists \alpha,\beta : \alpha M(x) \leq N(x) \leq \beta M(x)$

فصل دوم: «حل دستگاه های معادلات خطی»

دستگاه های معادلات خطی کاربردهای فراوانی در علوم مهندسی دارند از جمله این کاربردها در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی میباشد. در حالت کلی روش های حل دستگاه های معادلات خطی به دو نوع مستقیم و تکراری تقسیم بندی میشود در روش های مستقیم می توان جواب دستگاه را با تعدادی متناهی عمل حسابی بدست آورد اما در مقابل یک روش تکراری یک فرآیند نامتناهی برای بدست آوردن جواب است که براساس یک حدس اولیه برای جواب عمل میکند. در حالت کلی دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

NOTE:

شکل ماتریسی دستگاه فوق به صورت زیر است:

$Ax = b$ → بردار معلوم

ماتریس ضرایب — بردار مجهول

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

روش های مستقیم برای حل دستگاه $Ax=b$:

الف) روش کرامر: در این روش مولفه های بردار مجهول از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

ستون i ام

$\rightarrow |A|$

روش فوق علی رغم سادگی به خاطر نیاز به محاسبه دترمینان بسیار پرهزینه است. زیرا اگر ماتریس A، $n \times n$ باشد میزان پیچیدگی محاسباتی روش $O(n!)$ است. یعنی اینکه با افزایش n تعداد عملیات های روش (یا زمان محاسبات) به نسبت $n!$ افزایش می یابد که برای n های بزرگ بسیار پرهزینه است.

NOTE:

ب) روش حذفی گاوس: قبل از بیان روش ابتدا مقدماتی را بیان می کنیم. فرض کنیم

E_i نشان دهنده معادله iام دستگاه $Ax=b$ باشد.

$$E_i \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

اعمال سطری مقدماتی روی دستگاه فوق به صورت زیر نشان داده می‌شود:

۱) با ضرب سطر iام دستگاه فوق در ثابت λ جواب دستگاه تغییری نمی‌کند.

$$\lambda E_i \longrightarrow E_i$$

۲) با افزودن مضرب ثابتی از یک سطر به سطر دیگر جواب معادله تغییر نمی‌کند.

$$\lambda E_i + E_j \longrightarrow E_j$$

۳) اگر جای دو معادله در دستگاه فوق تعویض شود جواب معادله تغییر نمی‌کند.

$$E_i \longleftrightarrow E_j$$

حل دستگاه‌های بالا مثلثی:

فرض کنیم $UX=b$ یک دستگاه بالا مثلثی باشد یعنی

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

برای حل دستگاه فوق از جایگذاری پسرو استفاده می‌کنیم به این صورت که از معادله آخر شروع می‌کنیم:

NOTE: $u_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \dfrac{b_n}{u_{nn}}$

سپس x_{n-1} را محاسبه می‌کنیم:

$u_{n-1\,n-1}x_{n-1} + u_{n-1\,n}x_n = b_{n-1} \Rightarrow$

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1\,n-1}}\left[b_{n-1} - u_{n-1\,n}\, x_n\right]$$

این کار را تا محاسبه x_{n-2} ، x_{n-3} ، ... ، x_2 ، x_1 ادامه می‌دهیم.

در حالت کلی در هر مرحله iام الگوریتم روش به صورت زیر است:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left[b_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}\, x_k\right] \quad , \quad \text{معلوم}: x_n, \dots, x_{i+1}$$

نکته: به طریق مشابه اگر $Lx=b$ یک دستگاه پایین مثلثی باشد با جایگذاری پیشرو متوالی جواب دستگاه را می‌توان محاسبه نمود.

در روش حذف گوس هدف تبدیل دستگاه $Ax=b$ به یک دستگاه بالا مثلثی مانند $Ux=\bar{b}$ با استفاده از اعمال سطری مقدماتی است تا بتوان با جایگذاری پسرو جواب دستگاه را محاسبه نمود.

شنبه ۹۸,۷,۲۰ صفحه ضمیمه

روش حذفی گاوس: فرض کنید در دستگاه $Ax=b$ ، A معکوس‌پذیر باشد. ماتریس افزوده دستگاه فوق را به صورت زیر نشان می‌دهیم

NOTE: $$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1\,n+1} \rightarrow b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2\,n+1} \rightarrow b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n\,n+1} \rightarrow b_n \end{array}\right]$$

مرحله اول (انتخاب درایه محوری) اگر $a_{11} \neq 0$ باشد در اینصورت a_{11} را به عنوان درایه‌ی محور در نظر می‌گیریم در غیر اینصورت سطر اول را با سطری که اولین درایه‌ی آن غیر صفر باشد جابجا می‌کنیم (دقت شود همیشه این کار امکان‌پذیر می‌باشد زیرا A وارون‌پذیر است). ضریب‌های m_{i1} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \; ; \; i = 2, \dots, n$$

سپس $-m_{i1}$ برابر سطر اول را با سطر iام برای $i = 2, 3, \dots, n$ جمع می‌کنیم. با این کار ماتریس افزوده زیر حاصل می‌شود.

$$[A^{(1)} | b^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a^{(1)}_{22} & \dots & a^{(1)}_{2n} & a^{(1)}_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a^{(1)}_{n2} & \dots & a^{(1)}_{nn} & a^{(1)}_{nn+1} \end{array}\right]$$

$$a^{(1)}_{ij} = a_{ij} - m_{i1} a_{1j} \quad i = 2, \dots, n \quad j = 2, \dots, n+1$$

مرحله دوم: اگر $a^{(1)}_{22} \neq 0$ در اینصورت این مولفه به عنوان درایه محور انتخاب می‌شود در غیر اینصورت سطر دوم را با سطری که در دومین مولفه‌ی آن غیر صفر باشد جابجا می‌کنیم. (با توجه به وارون‌پذیری A همیشه این کار امکان‌پذیر می‌باشد) ضریب‌های m_{i2} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$m_{i2} = \frac{a^{(1)}_{i2}}{a^{(1)}_{22}} \quad i = 3, 4, \dots, n$$

سپس $-m_{i2}$ برابر سطر دوم را با سطر iام برای $i = 3, 4, \dots, n$ جمع می‌کنیم.

NOTE:

در اینصورت ماتریس افزوده زیر حاصل می‌شود:

$$[A^{(2)} \mid b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a^{(1)}_{22} & \dots & a^{(1)}_{2n} & a^{(1)}_{2n+1} \\ 0 & 0 & a^{(2)}_{33} \dots & a^{(2)}_{3n} & a^{(2)}_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(2)}_{n3} \dots & a^{(2)}_{nn} & a^{(2)}_{nn+1} \end{array}\right]$$

$a^{(2)}_{ij} = a^{(1)}_{ij} - m_{i2}\, a^{(1)}_{2j}$

$i = 3, 4, \dots, n$

$j = 3, 4, \dots, n+1$

با ادامه فرآیند فوق تا مرحله $n-1$ ماتریس افزوده زیر حاصل میشود.

$$[A^{n-1} \mid b^{n-1}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a^{(1)}_{22} & \dots & a^{(1)}_{2n} & a^{(1)}_{2n+1} \\ 0 & 0 & a^{(2)}_{33} & a^{(2)}_{3n} & a^{(2)}_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a^{(n-1)}_{nn} & a^{(n-1)}_{nn+1} \end{array}\right]$$

$a^{(n-1)}_{ij} = a^{(n-2)}_{ij} - m_{i\,n-1}\, a^{(n-2)}_{(n-1)j} \qquad i = n \,,\; j = n, n+1$

دستگاه فوق یک دستگاه بالا مثلثی است که میتوان با جایگذاری پسرو جواب آن را بدست آورد.

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس جواب دستگاه زیر را بیابید.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$m_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} \quad i = 2, \dots, n \longrightarrow m_{21} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \qquad m_{31} = \dfrac{1}{4}$

NOTE: $a^{(1)}_{ij} = a_{ij} - m_{21}\, a_{1j} = 6 - \frac{1}{2} \times 1 = 6 - 1/2 = a^{(1)}_{22}$

$a^{(1)}_{ij} = a^{(1)}_{23} = a_{23} - \frac{1}{2}\, a_{13} = 2 - \frac{1}{2} \times (-1) = 2 + 1/2$

$a^{(1)}_{24} = a_{24} - 1/2\, a_{14} = -1 - 1/2 \times 2 = -2$

$۱۲۸ \div ۴ = ۳۲$

$۱۳ \times ۱۱ = ۱۴۳$

$۱۴۳ - ۱۵ = ۱۲۸$

$$a^{(1)}_{۳۲} = a_{۳۲} - m_{۳۱}\, a_{۱۲} = ۱ - \frac{۱}{۴} \times ۱ = ۱ - ۱/۴ = ۳/۴$$

$$m_{۳۱} = \frac{a_{۳۱}}{a_{۱۱}} = \frac{۱}{۴}$$

$$a^{(1)}_{۳۳} = a_{۳۳} - m_{۳۱}\, a_{۱۳} = ۳ - ۱/۴ \times (-۱) = ۳ + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۳}{۴}$$

$$a^{(1)}_{۳۴} = a_{۳۴} - m_{۳۱}\, a_{۱۴} = ۳ - \frac{۱}{۴} \times ۲ = ۳ - ۱/۲ = ۵/۲$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۴ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱۱/۲ & ۵/۲ & -۲ \\ ۰ & ۳/۴ & ۱۳/۴ & ۵/۲ \end{array}\right]$$

$$m_{i۲} = \frac{a^{(1)}_{i۲}}{a^{(1)}_{۲۲}} \longrightarrow m_{۳۲} = \frac{a^{(1)}_{۳۲}}{a^{(1)}_{۲۲}} = \frac{۳/۴}{۱۱/۲} = ۳/\cancel{۴}_{۲} \times \frac{\cancel{۲}^{۱}}{۱۱} = \frac{۳}{۲۲}$$

$$a^{(2)}_{۳۳} = a^{(1)}_{۳۳} - \frac{۳}{۲۲} \times a^{(1)}_{۲۳} = \frac{۱۳}{۴} - \frac{۳}{۲۲} \times \frac{۵}{۲} = \frac{۱۳}{۴} - \frac{۱۵}{۴۴} = \frac{۳۲}{۱۱}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۴ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱۱/۲ & ۵/۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ & \frac{۳۲}{۱۱} & \frac{۶۱}{۲۲} \end{array}\right]$$

$$\frac{۳۲}{۱۱} x_۳ = \frac{۶۱}{۲۲}$$

$$x_۳ = \frac{۶۱}{۶۴}$$

$$۱۱/۲\, x_۲ + ۵/۲\, x_۳ = -۲$$

$$x_۲ = \ldots$$

NOTE:

الگوریتم روش حذفی گاوس (برنامه نویسی)

Input $A=(a_{ij})$; $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,n+1$

```
for k = 1,2,...,n-1
    for i = k+1,...,n
        m_ik = a_ik / a_kk
        for j = k+1,...,n+1
            a_ij = a_ij - m_ik a_kj
        end
    end
end
```

"حل جایگذاری پسرو"

$$x_n = \frac{a_{n\,n+1}}{a_{nn}}$$

for $i = n-1,\dots,2,1$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[a_{i\,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right]$$

end

پروژه: برنامه کامپیوتری بنویسید که جواب دستگاه معادلات زیر را با روش حذفی گاوس محاسبه نماید.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

نکته: دقت شود چنانچه ماتریس A منفرد نباشد روش حذفی گاوس تا آخرین مرحله قابل اجرا است بنابراین اگر در یک مرحله‌ای نتوان روش حذفی گاوس را اجرا نمود بنابراین نتیجه می‌گیریم که ماتریس A دارای دترمینان صفر است به عبارت دیگر عبارت‌ها معادل می‌باشند.

NOTE:-

۱) دستگاه $Ax=b$ جواب منحصر بفرد دارد.

۲) $\det(A)\neq 0$

۳) $\operatorname{rank}(A)=n$

۴) دستگاه $Ax=0$ فقط جواب بدیهی دارد.

۵) روش حذفی گاوس تا آخرین مرحله قابل اجرا است.

مشکلات روش حذفی - گاوس:

در برخی از مواقع ممکن است سوال روش حذفی گاوس را تا آخرین مرحله پیش برد و جواب دستگاه را محاسبه نمود اما جواب ها قابل قبول نیستند یکی از علل این مشکل بزرگ بودن

پس از صفر شدن که می توانند باشند عناصر دیگر در راستای $m_{ik}=\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ ممکن است

a_{kk} بسیار کوچک باشد باعث بزرگ شدن پس از صفر شدن می شود در این حالت

همانطور که میدانید ضرب اعداد بزرگ در یکدیگر باعث انتشار خطای محاسباتی می گردد

سوال: مثال دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$0.0003x_1+1.566x_2=1.569$

$0.3456x_1-2.436x_2=1.018$

جواب واقعی دستگاه: $x_1=10,\ x_2=1$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3456 & -2.436 & 1.018 \end{array}\right]=[A|b] \qquad m_{21}=\frac{0.3456}{0.0003}=1151$$

$$[A^{(1)} \mid b^{(1)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 1.566 & 1.569 \\ 0 & -1840 & -1805 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4.78 \\ x_2 = 1.001 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که جواب بدست آمده با تقریب خوبی نیست و با جواب واقعی متفاوت است.

اگر بتوانیم ضریب‌ها را تا حد امکان کوچک نگه داریم در آن حالت مطلوب‌تر از قبل خواهد بود

در این صورت چنین خطاهایی در محاسبات کمتر می‌شود اینکار را روش محورگیری

حل از روش حذفی ـ گاوس می‌گوییم.

جلسه هشتم ۹۸,۷,۲۲ دوشنبه

روش محورگیری جزئی: فرض کنیم در مرحله k ام روش حذفی ـ گاوس قرار داریم:

$$[A^{(k-1)} \mid b^{(k-1)}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & & & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & & & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & a_{kn+1}^{(k-1)} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} & a_{nn+1}^{(k-1)} \end{array}\right] \quad (1)$$

اصول برای اجرای محورگیری جزئی در مرحله k ام درایه‌ای را که از لحاظ اندازه از مجموعه‌ی زیر را انتخاب

می‌کنیم $\{a_{kk}^{(k-1)}, a_{k+1k}^{(k-1)}, \ldots, a_{nk}^{(k-1)}\}$ (2) سپس سطر متناظر با این درایه را با سطر

k ام جابجا می‌کنیم اگر ضریب‌ها $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \; i=k+1,\ldots,n$ را تعریف کنیم واضح است

که اندازه‌ی ضریب‌ها کوچکتر یا مساوی یک خواهد شد و بنابراین از ضرب اعداد بزرگ

در رابطه کلیه اضافات میشود.

مثال: مطلوب است حل مثال قبل با استفاده از روش جزئی - گاوس با محورگیری جزئی. حل: درایه اول سطر دوم بزرگتر از درایه اول سطر اول است پس سطرها را جابجا می‌کنیم

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3456 & -2.436 & 1.018 \end{bmatrix}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 0.3456 & -2.436 & 1.018 \\ 0.0003 & 1.566 & 1.569 \end{bmatrix} \qquad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0.0003}{0.3456} = 0.868611 \times 10^{-3}$$

$$\xrightarrow[\text{گاوس}]{\text{روش حذفی}} [A^{(1)}|b^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0.3456 & -2.436 & 1.018 \\ 0 & 1.568 & 1.568 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

که جواب واقعی دستگاه است.

محورگیری کامل: فرض کنید در مرحله k ام روش حذفی گاوس قرار داریم یعنی رابطه (۱) برقرار است. در محورگیری کامل به جای انتخاب مقسوم مولفه از محورگیری سطری (۲) مقسوم مولفه از لحاظ اندازه را از زیر ماتریس زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

در این صورت اگر بزرگترین مولفه از لحاظ اندازه درایه a_{rs} باشد سطر r ام را با سطر k ام جابجا می‌کنیم سپس ستون s را با ستون k جابجا می‌کنیم تا مولفه‌ی مورد نظر درایه‌ی محور شود.

NOTE:

روش حذفی گاوس با محورگیری کامل علیرغم اینکه دارای پیچیدگی محاسباتی است اما از بهترین و پایدارترین الگوریتم ها در حل دستگاههای معادلات خطی میباشد (الگوریتم پایدار الگوریتمی است که از رشد خطاهای محاسباتی جلوگیری میکند).

مثال: با استفاده از روش حذفی - گاوس با محورگیری کامل جواب دستگاه زیر را بیابید.

$$\begin{cases} 30x_1 + 591400x_2 = 591700 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 30 & 591400 & 591700 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{محورگیری کامل}}$$

درایه محور

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 591400 & 30 & 591700 \\ -6.130 & 5.291 & 46.78 \end{array}\right] \qquad m_{21} = \frac{-6.130}{591400} = -1.0365\times10^{-5}$$

$$\xrightarrow{\text{اعمال روش حذفی - گاوس}} [A^{(1)}|b^{(1)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 591400 & 30 & 591700 \\ 0 & 52.914 & 52.914 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

تمرین: با استفاده از روش حذفی - گاوس و محورگیری های جزئی و کلی جواب دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

($x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ جواب واقعی دستگاه)

همین طور که ملاحظه شد برای تضمین جواب های حاصل از روش حذفی گاوس نیاز به الگوریتم های دیگر مانند محورگیری جزئی و محورگیری کامل می باشد اما دسته خاصی از ماتریس ها وجود دارند که روش حذفی گاوس بدون محورگیری روی آنها اعمال شود جواب های دستگاه تضمین شده می باشد این ماتریس ها در زیر معرفی می شوند:

الف) ماتریس های اکیداً قطر غالب (غالب قطری اکید)

تعریف: ماتریس A یک ماتریس غالب قطری اکید نامیده می شود هرگاه به ازای هر i

$$\forall i\ ;\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

مثلاً

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} |-4|>|1|+|2| \\ |7|>|3|+|2| \\ |-3|>|1|+|1| \end{array}$$

قضیه: هر ماتریس غالب قطری اکید یک ماتریس وارون پذیر است.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد:

$$\exists x\neq 0\ ;\ Ax=0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0 \quad (1),\quad i=1,2,\dots,n$$

فرض کنیم $|x_k|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$. واضح است که $x_k\neq 0$

NOTE:

در رابطه (1) قرار می دهیم $i=k$:

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = 0 \Rightarrow \sum_{k\neq j=1}^{n} a_{kj} x_j = -a_{kk} x_k$$

$$\Rightarrow |a_{kk}||x_k| = \left|\sum_{k\neq j=1}^{n} a_{kj} x_j\right| \leq \sum_{k\neq j=1}^{n} |a_{kj}||x_j|$$

$$\Rightarrow |a_{kk}| \leq \sum_{k\neq j=1}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{k\neq j=1}^{n} |a_{kj}|$$

$$\Rightarrow |a_{kk}| \leq \sum_{k\neq j=1}^{n} |a_{kj}|$$ ⨯ تناقض با غالب قطری اکید بودن A

قضیه: فرض کنید در دستگاه $Ax=b$ ، A یک ماتریس غالب قطری اکید باشد.

در این صورت روش حذفی گاوس را می‌توان تا آخرین مرحله پیش برد (چون A وارون‌پذیر است) و علاوه جواب‌ها بدست می‌آید، که از روش حذفی گاوس جواب‌ها قابل قبولی می‌باشند و به عبارت دیگر در این نوع دستگاه‌ها خطاهای محاسباتی رشد نمی‌کنند.

ب) ماتریس‌های مثبت معین: ماتریس A را یک ماتریس مثبت معین نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall x \neq 0,\ x^T A x > 0$$

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i > 0$$

NOTE: مثال: $A = I$: $\forall x \neq 0$; $x^T A x = x^T x = \|x\|_2^2 > 0$

جلسه نهم ۲۹/۷/۹۸ دوشنبه

تعریف: ماتریس A یک ماتریس نیمه مثبت معین است هرگاه

$\forall x \neq 0;\ x^TAx \geq 0$ $\qquad$ $\forall x \neq 0;\ x^TAx \geq 0$

مثال: نشان دهید ماتریس زیر یک ماتریس نیمه مثبت معین است.

$$A = \begin{bmatrix} z^4 & z^3 & z^2 \\ z^3 & z^2 & z \\ z^2 & z & 1 \end{bmatrix}$$

z: یک عدد حقیقی دلخواه $\qquad x^T = (x_1, x_2, x_3)$

$$Ax = \begin{bmatrix} z^4 & z^3 & z^2 \\ z^3 & z^2 & z \\ z^2 & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 z^4 + x_2 z^3 + x_3 z \\ x_1 z^3 + x_1 z^2 + x z \\ x_1 z^2 + x_2 z + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^TAx = x_1(x_1 z^4 + x_2 z^3 + x_3 z^2) + x_2(x_1 z^3 + x_2 z^2 + x_3 z)$$
$$+ x_3(x_1 z^2 + x_2 z + x_3) = x_1^2 z^4 + 2x_1x_2 z^3 + 2x_1x_3 z^2 + 2x_2x_3 z + x_3^2$$
$$= (x_1 z^2 + x_2 z + x_3)^2$$

توضیح: اگر A یک ماتریس مثبت معین باشد در این صورت وارون پذیر است.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد. $\exists x \neq 0,\ Ax = 0 \Rightarrow x^TAx = 0$

$\Rightarrow \exists x \neq 0,\ x^TAx = 0$ ✗ (چون A مثبت معین است)

NOTE: نکته: میدانیم x^TAx یک عدد است بنابراین ترانهاده ی آن با خودش برابر است

یعنی $x^TAx = (x^TAx)^T = x^TA^Tx \Rightarrow x^TAx = \frac{1}{2}x^TAx + \frac{1}{2}x^TA^Tx$

$$= x^T \overbrace{\left(\frac{A+A^T}{2}\right)}^{B} x = x^T B x$$

چون ماتریس B متقارن است همواره مثبت معین بودن را برای ماتریس‌های متقارن نشان میدهند.

قضیه: ماتریس A مثبت معین است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه آن مثبت باشند.

اثبات: فرض کنیم λ مقدار ویژه A باشد $\Rightarrow \exists x \neq 0 \,;\, Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow x^T A x = \lambda x^T x \Rightarrow \lambda = \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2} > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow x^T A x > 0$$

قضیه: اگر A مثبت معین باشد در اینصورت تمامی زیر ماتریس‌های پیشرو A، مثبت معین میباشد.

اثبات: میخواهیم نشان دهیم برای هر $k\ (k=1,\dots,n)$ ماتریس A_K یک ماتریس مثبت معین است بایستی نشان دهیم برای هر $y \neq 0$ ، $y^T A_k y > 0$; $y = (y_1, \dots, y_k)^T$

چون A مثبت معین است برای هر $x \neq 0$ ،

$$\forall x \neq 0 \,;\, x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0$$

ماتریس پیشرو مرتبه k $A_K = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} \end{bmatrix}$

NOTE:

قرار میدهیم $x^T = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \Rightarrow x \neq 0$ چون $y \neq 0$

$$x^TAx = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}y_iy_j = y^TA_ky > 0$$

قضیه: اگر A یک ماتریس مثبت معین باشد تمام درایه های قطری A مثبت هستند.

اثبات: $x = e_k \Rightarrow x^TAx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{kk} > 0 \Rightarrow \forall k : a_{kk} > 0$

قضیه: فرض کنید در دستگاه $Ax=b$ ماتریس A یک ماتریس مثبت معین باشد در اینصورت روش حذفی گاوس را بدون محورگیری میتوان تا آخرین مرحله پیش برد در حالیکه عناصر محوری مثبت باشند و به عبارت دیگر در روش حذفی گاوس برای حل این نوع دستگاه ها محاسبات نسبت به رشد خطاهای گرد کردن پایدار میباشد.

روش های تجزیه ماتریس A:

الف) تجزیه LU:

قضیه: اگر در ماتریس A دترمینان تمامی زیر ماتریس های پیشرو غیر صفر باشد در اینصورت ماتریس A را میتوان به صورت $A=LU$ نوشت که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی و U یک ماتریس بالا مثلثی

NOTE:

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

برای اثبات از روش حذفی گاوس استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم در اولین مرحله از روش حذفی گاوس قرار داریم.

$$|A_1| = |a_{11}| \neq 0 \Longrightarrow a_{11} \neq 0 \qquad m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \;,\; i=2,3,\ldots,n$$

پس از اعمال روش حذفی گاوس ماتریس زیر حاصل می‌شود

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

تمرین: بررسی کنید $A^{(1)} = M_1 A$

در مرحله دوم: $a_{22}^{(1)} \neq 0$ زیرا دترمینان ماتریس پیشرو مرتبه ۲ در A غیرصفر است بنابراین دترمینان ماتریس پیشرو مرتبه ۲ در ماتریس A_1 نیز باید غیرصفر باشد.

NOTE:

تعریف می‌کنیم $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \;,\; i=3,\ldots,n$ در این صورت با اعمال روش حذفی گاوس ماتریس

زیر حاصل میشود.

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

اگر $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}$ میتوان نشان داد $A^{(2)} = M_2 A^{(1)}$

با ادامه فرایند فوق در مرحله آخر خواهیم داشت

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

اگر $M_{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$ در اینصورت میتوان نشان داد $A^{(n-1)} = M_{n-1} A^{(n-2)}$

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} A^{(n-2)} = M_{n-1} M_{n-2} A^{(n-3)} = \cdots = M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1 A$$

نکته: M_i ها ماتریس های پایین مثلثی و وارون پذیرند زیرا $\det(M_i) = 1 \neq 0$

نکته: ضرب هر ماتریس پایین مثلثی در یک ماتریس پایین مثلثی و وارون هر ماتریس پایین مثلثی نیز یک ماتریس پایین مثلثی است.

$$\Rightarrow (M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1)^{-1} A^{(n-1)} = A \Rightarrow \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}}_{\text{پایین مثلثی}} \underbrace{A u^{(n-1)}}_{\text{بالا مثلثی}} = A$$

$$\Rightarrow A = LU$$

NOTE:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرین: نشان دهید

تمرین ۲) نشان دهید

$$L = M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

جلسه دهم ۹۶/۸/۴ شنبه

منحصر بفردی تجزیه LU :

تحت شرایط زیر تجزیه ی LU منحصر بفرد است :

الف) $\forall i \; ; \; l_{ii} = 1$

یا

ب) $\forall i \; ; \; u_{ii} = 1$

تجزیه متناظر با حالت الف را تجزیه دولیتل و تجزیه متناظر با حالت ب را تجزیه کروت می نامیم.

تجزیه منحصر بفردی تجزیه دولیتل :

$$\forall i \; ; \; l_{ii} = 1 \Rightarrow \det l = 1 \Rightarrow \det A = \det(l)\,\det(u) = \det(u)$$

چون $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(u) \neq 0 \Rightarrow$ u وارون پذیر

فرض کنیم تجزیه منحصر بفرد نباشد $\begin{cases} A = L_1 u_1 \\ A = L_2 u_2 \end{cases} \Rightarrow L_1 u_1 = L_2 u_2 \Rightarrow u_1 = L_1^{-1} L_2 u_2$

NOTE:

$$\Rightarrow u_1 u_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = D$$

چون L_1 و L_2 ها پایین مثلثی هستند پس وارون و ضرب آنها نیز پایین مثلثی است و به طریق
مشابه چون U_1 و U_2 ها بالا مثلثی هستند پس معکوس و ضرب آنها بالا مثلثی میباشد. به عبارت
دیگر سمت چپ رابطه فوق یک ماتریس بالا مثلثی و سمت راست یک ماتریس
پایین مثلثی است. بنابراین تساوی فوق تنها در صورتی امکان پذیر است که هر دو طرف
یک ماتریس قطری D برابر باشند. چون عناصر قطری L_1 و L_2 یک میباشد
پس وارون آنها و حاصلضرب آنها در یکدیگر نیز دارای عناصر قطری یک میباشد یعنی
$D = I$.

$$D = I \Rightarrow U_1 U_2^{-1} = I \Rightarrow U_1 = U_2$$
$$L_1^{-1} L_2 = I \Rightarrow L_1 = L_2$$
$\Rightarrow$ تجزیه منحصر بود است

به طریق مشابه منحصر بودن تجزیه کروت را نیز میتوان اثبات نمود.

کاربرد تجزیه LU در حل دستگاه های معادلات خطی:

دستگاه $Ax = b$ را در نظر میگیریم فرض کنیم ماتریس A دارای تجزیه LU باشد

$$\Rightarrow LUx = b \xrightarrow{Ux = y \ \text{فرض}} \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

NOTE:

از دستگاه اول y را محاسبه می کنیم (با جایگذاری پیشرو) و از دستگاه دوم x را با جایگذاری پسرو
می یابیم.

مثال: با محاسبه ی تجزیه ی LU ماتریس ضرایب دستگاه زیر به روش دولیتل جواب دستگاه را بیابید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

به ترتیب ابتدا یک سطر از u و یک ستون از L را داریم.

ضرب سطر اول L در ستون های u $\Rightarrow u_{11} = 2 , \; u_{12} = 4 , \; u_{13} = -6$

ضرب سطر دوم و سوم L در ستون اول u $\Rightarrow l_{21} u_{11} = 1 \Rightarrow l_{21} = \frac{1}{u_{11}} = \frac{1}{2} , \; l_{31} u_{11} = 1 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{2}$

ضرب سطر دوم L در ستون های دوم و سوم u $\Rightarrow l_{21} u_{12} + u_{22} = 5 \Rightarrow u_{22} = 5 - l_{21} u_{12} = 5 - \frac{1}{2} \times 4 = 3$

$l_{21} u_{13} + u_{23} = 3 \Rightarrow u_{23} = 3 - l_{21} u_{13} = 3 - \frac{1}{2} \times (-6) = 6$

ضرب سطر سوم L در ستون دوم u $\Rightarrow l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} = 3 \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{u_{22}} \left[3 - l_{31} u_{12} \right]$

NOTE:

$= \frac{1}{3} \left[3 - \frac{1}{2} \times 4 \right] = \frac{1}{3}$

ضرب سطر سوم L در ستون سوم u $\Rightarrow l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33} = 2 \Rightarrow u_{33} = 2 - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} = 3$

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = 12 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

تمرین: محاسبه تجزیه LU ماتریس ضرایب؟ روش دولیتل (کروت) و حل دستگاه.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

تجزیه چولسکی: قبلاً بیان کردیم ماتریس A همه مثبت معین است هرگاه $x^T A x > 0 \; ; \forall x \neq 0$. بررسی شرط فوق برای یک ماتریس A، و همه‌ی x ها مخالف صفر کار ساده‌ای نیست، به قضیه‌ی زیر ابزار ساده‌تری برای تشخیص مثبت معین بودن یک ماتریس متقارن بیان می‌کند.

قضیه: ماتریس A یک ماتریس مثبت معین است هرگاه دترمینان تمامی زیرماتریس‌های پیشروی آن مثبت باشند.

مثال: نشان دهید ماتریس زیر یک ماتریس مثبت معین است.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$|A_1| = |4| = 4 > 0$

$|A_2| = 23 > 0$

$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 89 > 0$

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس متقارن و مثبت معین باشد در این صورت یک ماتریس پایین مثلثی با درایه‌های قطری مثبت وجود دارد به طوری که $A = LL^T$.

اثبات: فرض کنیم $A_{n\times n}$ باشد. با استفاده از استقرای ریاضی قضیه را اثبات می‌کنیم.

ابتدا فرض کنیم $n=1$: $\Rightarrow A_{1\times 1} = [a_{11}]$; $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

چون $|A| > 0 \Rightarrow a_{11} > 0$

اگر $L = [l_{11}]$, $l_{11} = \sqrt{a_{11}} \Rightarrow A = LL^T$

پس قضیه برای ماتریس‌های یک بعدی برقرار است. فرض کنیم قضیه برای ماتریس‌های متقارن و مثبت معین $n-1$ بعدی برقرار باشد. نشان می‌دهیم برای ماتریس n بعدی A نیز برقرار است.

NOTE:

$$A = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(A_{n-1}, b, b^T)

واضح است که ماتریس A_{n-1} یک ماتریس متقارن و مثبت معین است زیرا خود ماتریس

A متقارن و مثبت معین میباشد.   پایین مثلثی

طبق فرض استقرا $\to \exists\, l_{n-1} : A_{n-1} = l_{n-1} l_{n-1}^T$

قرار میدهیم $L_n = \begin{bmatrix} l_{n-1} & 0 \\ c & \alpha \end{bmatrix}$.

بردار   عدد

α و c را طوری می‌یابیم که $A = L_n L_n^T$. برای این کار باید داشته باشیم

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ c & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{n-1}^T & c^T \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{n-1} l_{n-1}^T & l_{n-1} c^T \\ c\, l_{n-1}^T & cc^T + \alpha^2 \end{bmatrix}$$

باید داشته باشیم $l_{n-1} c^T = b \ (1) ; \ cc^T + \alpha^2 = a_{nn}$

کافیست c را از دستگاه معادله (1) بیابیم و قرار دهیم $\alpha = \sqrt{a_{nn} - cc^T}$

« جلسه یازدهم ۹۸/۸/۱۱ شنبه »

A متقارن + زیرماتریس‌های پیشرو مثبت $\leftarrow$ $A = LL^T$ (A تجزیه چولسکی دارد) $\forall i, L_{ii} = 1$

بالعکس میتوان نشان داد اگر ماتریس A دارای تجزیه چولسکی باشه در اینصورت ماتریس A

متقارن و مثبت معین است. $A^T = (LL^T)^T = LL^T = A \to$ متقارن A

NOTE: $\forall x \neq 0 ; \ x^TAx > 0 ; \ x^TAx = x^TLL^Tx = y^Ty = \|y\|_2^2$

(فرض می‌کنیم بردار $y = L^Tx \to x^TL = y^T$) میدانیم $\|y\|_2^2 \geq 0$ کافیست نشان دهیم $\|y\| \neq 0$

اگر $\|y\|_2 = 0 \rightarrow y = 0 \cdot x$ زیرا $x \neq 0 \rightarrow y = L^T x \neq 0$
وارون پذیر

(ماتریس مثلثی و درایه‌های روی قطر مخالف صفر ← وارون پذیر ← L^T وارون پذیر

حال $L^T x = 0$ جواب دارد اگر $x = 0$ باشد چون $x \neq 0$ است ← $L^T x \neq 0$ است.)

الگوریتم تجزیه چولسکی:

$$A = LL^T \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ 0 & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & L_{nn} \end{bmatrix}$$

ضرب سطر اول L در ستون اول L^T : $L_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow L_{11} = \sqrt{a_{11}}$ — همه درایه‌های ستون اول L با سطر اول L^T $\Rightarrow$

ضرب سطرهای L در ستون اول L^T : $L_{21} L_{11} = a_{21} \Rightarrow L_{21} = \frac{a_{21}}{L_{11}}$

$L_{i1} = \frac{a_{i1}}{L_{11}}$; $i = 2, 3, \ldots, n$

حال فرض کنیم $(i-1)$ ستون اول L محاسبه شده باشد

$$A = LL^T \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} L^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} L_{jk}$$

چون L یک ماتریس پایین مثلثی است ← $L_{ik} = 0$, $k > i$ ← $\sum_{k=1}^{n} L_{ik} L_{jk} = \sum_{k=1}^{i} L_{ik} L_{jk}$

اگر $i = j \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} L_{ik} L_{ik} = L_{i1}^2 + L_{i2}^2 + \cdots + L_{ii}^2 \Rightarrow$

NOTE:

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ij} - L_{i1}^2 - L_{i2}^2 - \cdots - L_{i,i-1}^2}$$

اگر $i \neq j \rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} l_{jk} = l_{i1} l_{j1} + \dots + l_{ii} l_{ji}$

$$\Rightarrow l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \left[a_{ij} - l_{i1} l_{j1} - \dots - l_{i(i-1)} l_{j(i-1)} \right], \quad \begin{matrix} i = 2, \dots, n \\ j = i+1, \dots, n \end{matrix}$$

حل دستگاه $Ax=b$ با تجزیه چولسکی:

فرض کنیم در دستگاه $Ax=b$ ماتریس A دارای تجزیه چولسکی باشد یعنی $A=LL^T$

$$A = LL^T \; ; \; Ax = b \rightarrow LL^T x = b \rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

دستگاه اول یک دستگاه پایین مثلثی است که با جایگذاری پیشرو y به دست می‌آید و پس

دستگاه دوم که یک دستگاه بالا مثلثی است با جایگذاری پسرو x به دست می‌آید

تمرین: با محاسبه تجزیه چولسکی ماتریس ضرایب دستگاه زیر، جواب دستگاه را بیابید

تجزیه چولسکی: ۱- متقارن ۲) دترمینان زیرماتریس‌های پیشرو A مثبت باشند

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$A_{11} = [4] \;,\; 4 > 0 \checkmark \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 19 > 0 \checkmark$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4(16) + (-2) - 3 = 59 > 0 \checkmark$$

NOTE:

← تجزیه چولسکی دارد.

استفاده از تجزیه LU و چولسکی برای حل دستگاه‌های مختلف با ماتریس ضرایب یکسان :

بعد از اینکه وجود تجزیه LU و چولسکی حل دستگاه‌های مختلف با ماتریس ضرایب یکسان

$Ax=b_1 \;,\; Ax=b_2 \;,\; \dots \;,\; Ax=b_m$

می‌باشد. (≡ دستگاه‌های سمت راست متعدد) با یکبار محاسبه تجزیه LU یا چولسکی همه دستگاه‌ها به جای پیشرو و پسرو حل خواهند شد. از جمله دستگاه‌ها با سمت راست متعدد می‌توان به یافتن معکوس یک ماتریس اشاره کرد. فرض کنیم A وارون پذیر و B وارون آن باشد پس $AB=I$ اگر

$I=[I_1,\dots,I_n] \;,\; B=[b_1,b_2,\dots,b_n]$

ستون اول — ستون n ام

در این صورت :

$AB=I \Rightarrow A[b_1,b_2,\dots,b_n]=[I_1,\dots,I_n]$

یا

$[Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n]=[I_1,\dots,I_n] \Rightarrow \begin{cases} Ab_1=I_1 \\ \vdots \\ Ab_n=I_n \end{cases}$

n دستگاه با ماتریس ضرایب A یکی و سمت راست متعدد

مثال: مطلوب است محاسبه معکوس ماتریس زیر با استفاده از الگوریتم حل دستگاه‌ها با سمت راست متعدد.

NOTE: $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۳ \\ ۲ & -۶ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ حل:

تجزیه LU در صورتی که ماتریس قطری غالب باشد *
تجزیه چولسکی در صورتی که ماتریس متقارن مثبت معین باشد
... تجزیه LU ...

$$A=\begin{bmatrix}5&1&3\\2&-6&1\\3&2&7\end{bmatrix}\underset{LU}{\overset{\text{تجزیه}}{=}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2/5&1&0\\3/5&-7/32&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}5&1&3\\0&-32/5&-1\\0&0&121/32\end{bmatrix}}_{U}$$

حال اگر $B=[b_1,b_2,b_3]$ وارون A باشد، باید دستگاه‌های زیر حل شوند:

$$\begin{cases}Ab_1=I_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\ Ab_2=I_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\\ Ab_3=I_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{cases}\xRightarrow[\text{با جایگذاری پسرو و پیشرو}]{\text{حل دستگاه‌ها}} b_1=\begin{bmatrix}2/5\\-1/11\\-2/11\end{bmatrix},\ b_2=\begin{bmatrix}-3/121\\-20/121\\7/121\end{bmatrix},\ b_3=\begin{bmatrix}-13/121\\-6/121\\32/121\end{bmatrix}$$

در تجزیه چولسکی با یک ماتریس L سروکار داریم و آن را راحت محاسبه می‌شود اما در تجزیه LU،
۲ ماتریس L و U را باید محاسبه کرد. بین روش‌ها که با هر ۲ روش می‌توان حل کرد بجز الف با

تجزیه چولسکی حل کنیم چون وقت کمتری می‌گیرد.

تمرین: معکوس ماتریس زیر را با استفاده از فرایند فوق بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-3&1&1\\2&6&2\\2&-1&-4\end{bmatrix}$$

NOTE:

جلسه دوازدهم ۹۸/۸/۱۳ دوشنبه

آنالیز خطای حل دستگاه‌های خطی:

تعریف: یک الگوریتم برای حل یک مسئله مورد نظر پایدار نامیده می‌شود هرگاه جواب محاسبه شده توسط آن جواب واقعی یک مسئله‌ای نزدیک به مسئله اولیه باشد.

به عنوان مثال اگر در حل دستگاه $Ax=b$ جواب محاسبه شده توسط الگوریتم x_c باشد در اینصورت این الگوریتم پایدار است هرگاه x_c در دستگاه زیر صدق کند.

$(A+\Delta A)x=b+\delta b$ «مطلق» $\|\Delta A\|, \|\delta b\|$: کوچک هستند

«نسبی» $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$:

تعریف: یک مسئله را بدوضع گویند هرگاه تغییرات کوچک در ورودی‌ها مسئله باعث ایجاد تغییرات بزرگ در جواب مسئله شود به عنوان مثال در حل دستگاه $Ax=b$ اگر در ذخیره سازی ماتریس ضرایب A دچار خطای $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ یا در ذخیره سازی بردار b دچار خطای $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ شویم در اینصورت جواب حاصل از الگوریتم بسیار متفاوت شود یا به عبارت دیگر خطای نسبی جواب یعنی $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ بزرگ شود

NOTE: بدوضعی یک مسئله به ذات مسئله بستگی دارد و نقش الگوریتم در حل یک مسئله بدوضع

پایدارترین الگوریتم ها نیز جواب بدهند، اما در مقابل یک مسئله خوش وضع نسبت به
تغییرات کوچک در ورودی های مسئله حساس نمیباشد و اگر یک مسئله خوش وضع
اما یک الگوریتم پایدار حل شود جواب های آن تضمین شده میباشد، زیرا پایداری الگوریتم
بیان میکند که جواب محاسبه شده جواب واقعی یک مسئله نزدیک به مسئله اولیه است
و خوش وضعی مسئله تضمین میکند که خطاهای کوچک در ورودی های مسئله باعث تغییرات
بزرگ در جواب های مسئله نمیشود.

در دستگاه $Ax=b$ برای تعیین خوش وضعی یا بد وضعی دستگاه عددی به نام "عدد
حالت دستگاه" به صورت زیر تعریف میکنند: $K(A)=k_p(A)=\|A\|_p\|A^{-1}\|_p$

هر اندازه که $k(A)$ بزرگ باشد مسئله بد وضع تر و هر اندازه که $k(A)$ کوچک باشد مسئله
خوش وضع تر میباشد.

تمرین: نشان دهید حداقل عدد حالت یک است.

NOTE: $AA^{-1}=I \Rightarrow \|AA^{-1}\|=\|I\|=1 \Rightarrow \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$

$\Rightarrow 1 \leq \|A\|\|A^{-1}\| = k(A)$

از نمونه ماتریس های بدوضع میتوان به ماتریس هیلبرت اشاره کرد

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & & & \\ 1/n & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}$$

اگر $n=5 \Rightarrow K(H_5) = 4.8 \times 10^5$

$K(A)$ نقش مهمی در آنالیز خطاهای حل دستگاه های خطی ایفا میکند قبل از بیان قضایا

ابتدا مثالی بیان می کنیم. دستگاه زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3.999x_2 = 5.999 \end{cases}$$

جواب واقعی $x_1 = x_2 = 1$

حال یک اختلال کوچک در سمت راست ایجاد می کنیم یعنی دستگاه زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3.999x_2 = 6 \end{cases}$$

جواب دستگاه فوق به روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی به صورت زیر است:

$x_1 = 3 \ , \ x_2 = 0$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix} \rightarrow K(A) = 2.4992 \times 10^4$

ملاحظه میشود وقتی $K(A)$ بزرگ است تغییرات کوچک در ورودی های مسئله باعث ایجاد تغییرات بسیار بزرگ در جواب مسئله میشود.

NOTE:

قضیه: فرض کنیم در دستگاه $Ax=b$ ، A نامنفرد، x_t : جواب واقعی دستگاه

$Ax_t = b$

x_e : جواب تقریبی دستگاه و $r=b-Ax_e$ را داشته باشیم : خطای نسبی جواب x_e

$$\frac{\|r\|}{\|b\|K(A)} \le \frac{\|x_t-x_e\|}{\|x_t\|} \le \frac{\|r\|}{\|b\|}K(A)$$

اثبات : $Ax_t=b\ ,\ r=b-Ax_e=Ax_t-Ax_e=A(x_t-x_e)$

$$\Rightarrow \frac{\|r\|}{\|x_t\|} = \|A(x_t-x_e)\| \le \|A\|\frac{\|x_t-x_e\|}{\|x_t\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|r\|}{\|x_t\|\|A\|} \le \frac{\|x_t-x_e\|}{\|x_t\|} \quad (1)$$

چون $Ax_t=b \Rightarrow x_t=A^{-1}b \Rightarrow \|x_t\| \le \|A^{-1}\|\|b\|$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x_t\|} \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|\|b\|} \Rightarrow \frac{\|r\|}{\|x_t\|\|A\|} \ge \frac{\|r\|}{\underbrace{\|A\|\|A^{-1}\|}_{K(A)}\|b\|}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\|r\|}{K(A)\|b\|} \le \frac{\|x_t-x_e\|}{\|x_t\|}$$

از طرفی $r=A(x_t-x_e) \Rightarrow x_t-x_e=A^{-1}r \Rightarrow \frac{\|x_t-x_e\|}{\|x_t\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|x_t\|}$ (2)

همچنین $Ax_t=b \Rightarrow \|b\| \le \|A\|\|x_t\| \Rightarrow \frac{1}{\|x_t\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$

$$\Rightarrow \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|x_t\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\|r\|}{\|b\|} \xRightarrow{(2)} \frac{\|x_t-x_e\|}{\|x_t\|} \le K(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

نتیجه : از قضیه فوق میتوان نتیجه گرفت هر اندازه $K(A)$ کوچک‌تر باشد خطا میتواند کوچکتر شود و هر اندازه $K(A)$ بزرگ شود خطای نسبی جواب میتواند زیاد شود .

تمرین: فرض کنیم دستگاه $Ax=b$ با یک روش عددی حل شود و جواب x_e حاصل شود

برای بررسی خوب بودن جواب $r=b-Ax_e$ را محاسبه می‌کنیم. آیا کوچک بودن $\|r\|$

برای خوب بودن جواب کافیست؟ خیر. حل در صورت بدوضع بودن مسئله تنها کوچک بودن

$\|r\|$ کافی نیست و به مقدار $K(A)$ بستگی دارد.

قضیه: فرض کنیم در دستگاه $Ax=b$ ، A: نامنفرد ، x_t: جواب دقیق ، x_e: جواب تقریبی

و ماتریس E ماتریس خطا در ماتریس ضرایب A به گونه‌ای باشد که $(A+E)x_e=b$ در این صورت

$$\frac{\|x_t-x_e\|}{\|x_e\|}\leq\frac{\|E\|}{\|A\|}K(A)$$

اثبات:

$$(A+E)x_e=b\Rightarrow Ax_e+Ex_e=b=Ax_t$$

$$\Rightarrow A(x_t-x_e)=Ex_e\Rightarrow x_t-x_e=A^{-1}Ex_e$$

$$\Rightarrow\|x_t-x_e\|\leq\|A^{-1}\|\|E\|\|x_e\|\Rightarrow\frac{\|x_t-x_e\|}{\|x_e\|}\leq\frac{\|E\|\|A^{-1}\|\|A\|}{\|A\|}$$

$$=\frac{\|E\|}{\|A\|}K(A)$$

NOTE:

تبصره: قضیه فوق نشان میدهد که یک اختلال کوچک در ماتریس ضرایب

($\|E\|$ کوچک باشد) در صورتیکه باعث ایجاد تغییرات بزرگ در جواب نمیشود که مسئله

«جلسه سیزدهم ۹۸،۸،۱۸ شنبه»

روش وضع باشند.

روش های تکراری برای حل دستگاه های خطی :

روش های مستقیم مانند روش حذفی گاوس با انواع محورگیری ها به خاطر محدودیت در حافظه ماشین که برای حل دستگاه های با ابعاد کوچک به کار می‌رود در مقابل در بسیاری از کاربردها نیاز به حل دستگاه های با ابعاد بسیار بزرگ میباشیم. برای حل این نوع دستگاه ها از روش ها تکراری استفاده می کنیم. یک روش تکراری یک فرآیند نامتناهی برای یافتن جواب است که بر اساس بردار حدس اولیه که برای حل دستگاه در نظر گرفته می‌شود. میباشد. روش ها تکراری برای حل دستگاه هایی که ماتریس ضرایب آنها دارای شکل خاصی است به کار می‌رود مانند دستگاه های سه قطری:

$$A=\begin{bmatrix} * & * & & 0 \\ * & * & * & \\ & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & * & * \end{bmatrix}$$

دستگاه های پنج قطری:

$$A=\begin{bmatrix} * & * & * & & 0 \\ * & * & * & \ddots & \\ * & * & \ddots & \ddots & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & * & * & * \end{bmatrix}$$

دستگاه های سه قطری بلوکی:

ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & & 0 \\ C_1 & \ddots & \ddots & B_{n-1} \\ 0 & & C_{n-1} & A_n \end{bmatrix}$$

NOTE: در روش های تکراری برای حل دستگاه $Ax=b$ ابتدا شکل دستگاه را به صورت معادل $x=Tx+c$ نوشته می‌شود سپس با حدس اولیه دلخواه $x^{(0)}=[x_1^{(0)}\dots x_n^{(0)}]^T$ شروع می‌کنیم.

ماتریس بردار

دنباله بردارهای $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ را از رابطه‌ی $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ می‌یابیم.

(فرایند دقیقاً مشابه ریشه یابی با روش تکرار نقطه ثابت میباشد.)

فرایند فوق را تا هر تکراری که محک توقف که به صورت زیر میباشد ادامه میدهیم.

1) $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon$ یا 2) $\dfrac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{\| x^{(k+1)} \|} < \varepsilon$

۳) مشخص بودن تعداد تکرارها

روش تکراری ژاکوبی: این روش را با یک مثال توضیح میدهیم.

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

جواب واقعی: $x_t = (1, 2, -1, 1)^T$

ابتدا فرض می‌کنیم $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ (در غیر اینصورت با جابجایی معادلات

این فرض را برقرار می‌کنیم) از معادله i‌ام x_i را می‌یابیم:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right] \quad (1) \qquad x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}\right]$$

NOTE:

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}\right] \qquad x_4^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right]$$

ماتریس شکل دستگاه هی $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ ، $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ ، $T = \begin{bmatrix} 0 & 1/10 & -2/10 & 0 \\ 1/11 & 0 & 1/11 & -3/11 \\ -2/10 & 1/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & -3/8 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$

و $c = \begin{bmatrix} 6/10 \\ 25/11 \\ -11/10 \\ 15/8 \end{bmatrix}$

حال با حدس اولیه‌ی دلخواه $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_4^{(0)}]^T$ شروع و دنباله $\{x^K\}$ را از رابطه (۱) می‌سازیم. اگر $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$

K	0	1	....	10
$x_1^{(0)}$	0	$6/10$	....	1.0001
$x_2^{(0)}$	0	$\frac{25}{11}$	....	1.9998
$x_3^{(0)}$	0	$\frac{-11}{10}$	....	0.9998
$x_4^{(0)}$	0	$\frac{15}{8}$	....	0.9998

محک توقف: $\dfrac{\|x^{(K+1)} - x^{(K)}\|_\infty}{\|x^{(K+1)}\|_\infty} < 10^{-3}$

$\dfrac{\|x^{(10)} - x^{(9)}\|_\infty}{\|x^{10}\|_\infty} < 10^{-3} \Rightarrow x^{(10)}$ تقریبی از جواب دستگاه

بیان الگوریتم در حالت کلی (روش ژاکوبی):

در حالت کلی برای دستگاه $Ax = b$ شکل تکراری روش ژ به صورت زیر است:

$$(2)\quad x_i^{(K+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(K)}\Big], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

تا برقراری محک توقف $K = 0, 1, \dots$

شکل ماتریسی روش ژاکوبی: فرض کنیم $A = L + D + U$

NOTE: $L = \begin{bmatrix} 0 & & \bigcirc \\ a_{21} & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & \cdots \; a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & a_{nn} \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & a_{n-1n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

$$(۲):\ a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \qquad i=1,\dots,n$$

$$\downarrow$$

$$D x^{(k+1)} = b - (L+U) x^{(k)}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = D^{-1} b - D^{-1}(L+U) x^{(k)} \Rightarrow x^{(k+1)} = T x^{(k)} + c$$

$\Rightarrow T = -D^{-1}(L+U)$: ماتریس تکرار روش ژاکوبی $c = D^{-1} b$: بردار تکرار روش ژاکوبی

روش تکراری گاوس ـ سایدل : مثال قبل را در نظر می‌گیریم

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{۱۰}\left[۶ + x_۲^{(k)} - ۲x_۳^{(k)}\right] \qquad x_۲^{(k+1)} = \frac{1}{۱۱}\left[۲۵ + x_1^{(k+1)} + x_۳^{(k)} - ۳x_۴^{(k)}\right]$$

$$x_۳^{(k+1)} = \frac{1}{۱۰}\left[-۱۱ - ۲x_1^{(k+1)} + x_۲^{(k+1)} + x_۴^{(k)}\right] \qquad x_۴^{(k+1)} = \frac{1}{۸}\left[۱۵ - ۳x_۲^{(k+1)} + x_۳^{(k+1)}\right]$$

K	۰	۱	...	۵
$x_1^{(k)}$	۰	۶/۱۰		۱٫۰۰۰۱
$x_۲^{(k)}$	۰	۲٫۳۲۷۲		۲٫۰۰۰۰
$x_۳^{(k)}$	۰	-۰٫۹۸۷۳		-۱٫۰۰۰۰
$x_۴^{(k)}$	۰	۰٫۸۷۸۹		۱٫۰۰۰۰

بیان الگوریتم روش تکراری گاوس ـ سایدل در حالت کلی :

NOTE: $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

شکل ماتریسی روش تکراری گاوس - سایدل :

$$Dx^{(k+1)} = b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} \Rightarrow (D+L)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = (D+L)^{-1}b - (D+L)^{-1}Ux^{(k)} \quad \text{یا} \quad x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C$$

بردار تکرار روش گاوس - سایدل : $C = (D+L)^{-1}b$ ماتریس تکرار روش گاوس سایدل : $T = -(D+L)^{-1}U$

تمرین : با سه تکرار از روش های ژاکوبی و گاوس سایدل تقریبی از جواب دستگاه زیر را بیابید.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

معادله دوم را با معادله سوم جابجا می کنیم

الگوریتم روش ژاکوبی :

«جلسه چهاردهم ۹۸/۸/۲۰ دوشنبه»

Input $A, b, x^{(0)}, \varepsilon$

سوال ۳ را حذف کرد

$k = 0$

1 $z = x^{(k)}$

for $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} z_j\right]$$

end

NOTE: If $\dfrac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{\| x^{(k+1)} \|} < \varepsilon$, exit and print $(x^{(k+1)})$

else $k = k+1$ and go to 1

الگوریتم روش گاوس سایدل:

Input $A, b, x^{(0)}, \varepsilon$

$k = 0$

for $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

end.

حال سوالی که مطرح میشود این است که در چه شرایطی همگرایی روش های فوق تضمین میشود؟

همگرایی روش های تکراری:

میخواهیم در حالت کلی همگرایی روش تکراری $\overset{\text{بردار}}{x^{(k)}} = \overset{\text{ماتریس}}{T} x^{(k-1)} + \overset{\text{بردار}}{c}$

برای حل حدس اولیه $x^{(0)}$ بررسی کنیم برای این کار ابتدا تعریفی را بیان می کنیم.

تعریف: ماتریس A را یک ماتریس همگرا گوییم هرگاه $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ یا $\lim_{k\to\infty} a_{ij}^k = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \longrightarrow A^k = \begin{bmatrix} (1/2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (1/3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^k \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{ij}^k = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0$$

تعریف: شعاع طیفی ماتریس A را با ρA نمایش داده میشود و به صورت زیر تعریف میشود:

$\rho A = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ ؛ $\lambda_i ; i = 1, \dots, n$ مقادیر ویژه A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -9 \Rightarrow \rho A = 9 = \max\{|1|, |4|, |-9|\}$$

NOTE:

قضیه: فرض کنید نرم $\|A\|$ یک نرم ماتریسی القایی باشد در اینصورت

$\rho A \le \|A\|$

اثبات: فرض کنیم λ یک مقدار ویژه A پس $\exists x \neq 0 \; ; \; Ax = \lambda x$ ← بردار ویژه

$\Rightarrow \|\lambda x\| = \|Ax\| \to |\lambda| \cancel{\|x\|} \le \|A\| \cancel{\|x\|}$

$\to x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0 \Rightarrow |\lambda| \le \|A\| \xrightarrow[\text{دلخواه}]{\text{چون } \lambda \text{ مقدار ویژه}} \rho A \le \|A\|$

نتیجه: $\rho A \le \|A\|_1 \;,\; \rho A \le \|A\|_2 \;,\; \rho A \le \|A\|_\infty$

قضیه: احکام زیر معادل اند:

الف) A یک ماتریس همگرا است.

ب) $\rho A < 1$

قضیه: فرض کنیم T یک ماتریس مربعی ای باشد که $\rho(T) < 1$ در اینصورت $I - T$

وارون پذیر است و داریم $(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} T^i$

اثبات:

نکته ۱: ماتریس A وارون پذیر است اگر و فقط اگر هیچ مقدار ویژه صفر نداشته باشد.

نکته ۲: اگر λ یک مقدار ویژه T باشد $1-\lambda$ یک مقدار ویژه $I-T$ است.

اگر λ مقدار ویژه T $\to \exists x \neq 0 \; ; \; Tx = \lambda x \Rightarrow (I-T)x = Ix - Tx = x - \lambda x = (1-\lambda)x$

$\Rightarrow$ $1-\lambda$ مقدار ویژه $I-T$

اثبات: فرض کنیم $\lambda_i:\ i=1,\dots,n$ مقادیر ویژه T باشند پس $1-\lambda_i,\ i=1,\dots,n$ مقادیر ویژه $I-T$ می‌باشند. واضح است که $1-\lambda_i \neq 0,\ i=1,2,\dots,n$ زیرا طبق صورت قضیه $\rho(T)<1$ پس $|\lambda_i|<1$ بنابراین $I-T$ وارون‌پذیر است. قرار می‌دهیم $S_m = I+T+T^2+\dots+T^m$

$$\Rightarrow S_m(I-T) = (I+T+\dots+T^m)(I-T) = (I-T^{m+1})$$

سوال $T^{m+1}\to$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} S_m(I-T) = \lim_{m\to\infty} I-T^{m+1} \xrightarrow[T^{m+1}\to 0]{\rho(T)<1} I$$

$$\Rightarrow (I+T+T^2+\dots)(I-T) = I \Rightarrow (I-T)^{-1} = I+T+T^2+\dots$$

قضیه: فرض کنید $x = Tx + c$ (۱) و دنباله برداری $\{x^{(k)}\}$ از رابطه‌ی $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ ساخته شده باشد در اینصورت $x^{(k)} \to x$ حل دستگاه (۱)، برای هر حدس اولیه $x^{(0)}$ اگر و فقط اگر $\rho(T)<1$.

اثبات:

$$\begin{cases} x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \\ x = Tx + c \end{cases} \xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{تفریق}} x^{(k)} - x = T(x^{(k-1)} - x)$$

$$\Rightarrow (2)\ x^{(k-1)} - x = T(x^{(k-2)} - x) \Rightarrow x^{(k-2)} - x = T(x^{(k-3)} - x) \Rightarrow \dots$$

NOTE: $x^{(k)} - x = T(x^{(k-1)} - x) \overset{(2)}{=} T^2(x^{(k-2)} - x) = \dots = T^k(x^{(0)} - x)$

$$\Rightarrow x^{(k)} - x = T^k(x^{(0)} - x)$$

$x^k \to x \Leftrightarrow T^k \to 0 \Leftrightarrow \rho(T)<1$

بنابراین یک روش تکراری همگرا است اگر و فقط اگر شعاع طیفی ماتریس تکرار آن کمتر از یک باشد.

نتیجه: نشان دادیم که در روش ژاکوبی ماتریس تکرار $T_J = -D^{-1}(L+U)$

و در روش گاوس-سایدل $T_G = -(D+L)^{-1}U$

بنابراین روش ژاکوبی همگرا است اگر و فقط اگر $\rho(T_J)<1$ همچنین روش گاوس-سایدل همگرا است اگر و فقط اگر $\rho(T_G)<1$

بنابراین برای بررسی همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل در حل دستگاه $Ax=b$ ابتدا A را به صورت $L+D+U$ می‌نویسیم سپس ماتریس‌های T_G، T_J را تشکیل می‌دهیم. پس از آن مقادیر ویژه‌ی این ماتریس‌ها را می‌یابیم که شعاع طیفی برای ماتریس‌های حاصل از یک کمتر شود روش همگرا است در غیر این صورت روش واگرا می‌باشد اما دقت شود محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های T_J و T_G همواره کار ساده‌ای نمی‌باشد به خصوص اگر ابعاد

NOTE: این ماتریس‌ها بزرگ باشد بنابراین در عمل شاید نتوانیم قضیه بالا را استفاده کنیم حل چند

شرط ساده که شرایط لازمی برای همگرایی میباشند را بیان میکنیم .

۸

۹

۱۰

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

۱۸

۱۹

۲۰

NOTE:

Dolar: Euro: Gold: Bors:

جلسه شانزدهم

موضوع: تاریخ: ۹۸/۸/۲۵

قضیه: فرض کنید دستگاه $Ax=b$ ، A یک ماتریس غالب قطری اکید باشد
در این صورت روش ژاکوبی برای هر حدس اول $x^{(0)}$ همگرا است.

اثبات: کافی است نشان دهیم $\rho(T_j)<1$.

$T_j = -D^{-1}(L+U)$; $A = L + D + U$

(L: قسمت پایین مثلثی A ؛ D: عناصر قطری A ؛ U: قسمت بالا مثلثی A)

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \frac{1}{a_{22}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T_j = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{L+U = A-D}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}$$

مجموع قدرمطلق درایه سطر اول $= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|} < 1$ طبق ①

سطر دوم $= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} \frac{|a_{2j}|}{|a_{22}|} < 1$ طبق ①

$\vdots$

سطر n ام $= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{n} \frac{|a_{nj}|}{|a_{nn}|} < 1$ طبق ①

چون A یک ماتریس غالب قطری اکید است پس $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ ①

$\Rightarrow \|T_j\|_\infty < 1$

قبلاً نشان دادیم $\rho(A) \leq \|A\|$ (نرم القائی). پس $\rho(T_j) \leq \|T_j\|_\infty < 1$ و بنابراین
روش تکراری ژاکوبی به ازای هر حدس اولیه همگرا است.

جلسه هفدهم

تاریخ ۹۸/۸/۲۷

موضوع

قضیه: اگر در دستگاه $Ax=b$ ، A یک ماتریس غالب قطری اکید باشد در این صورت روش گاوس ـ سایدل با هر حدس اولیه همگرا است.

اثبات: کافی است نشان دهیم $\rho(T_G)<1$

$$A=L+D+U$$

$$T_G=-(D+L)^{-1}U$$

فرض کنیم λ یک مقدار ویژه T_G باشد پس بردار ویژه $x\neq 0$ وجود دارد به طوری که

$$T_G x=\lambda x \Rightarrow -(D+L)^{-1}Ux=\lambda x \Rightarrow -Ux=\lambda(D+L)x$$

$$\Rightarrow -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j=\lambda\left(a_{ii}x_i+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j\right)$$

$$\Rightarrow -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j-\lambda\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j \overset{①}{=} \lambda a_{ii}x_i \qquad i=1,2,\dots,n$$

فرض کنیم $|x_k|=\max\limits_{j=1,2,\dots,n}|x_j|$ واضح است که $|x_k|\neq 0$ (چون $x\neq 0$)

چون رابطه ① برای هر i برقرار است قرار دهیم $i=k$ پس

$$\lambda a_{kk}x_k=-\sum_{j=k+1}^{n}a_{kj}x_j-\lambda\sum_{j=1}^{k-1}a_{kj}x_j$$

قدرمطلق گیری از طرفین

$$\Rightarrow |\lambda||a_{kk}||x_k|\leqslant\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}||x_j|+|\lambda|\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}||x_j|$$

$$\Rightarrow |\lambda||a_{kk}|\leqslant\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|\underbrace{\frac{|x_j|}{|x_k|}}_{\leqslant 1}+|\lambda|\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|\underbrace{\frac{|x_j|}{|x_k|}}_{\leqslant 1}$$

$$\leqslant\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|+|\lambda|\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|$$

$$\Rightarrow |\lambda|\left(|a_{kk}|-\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|\right)\leqslant\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leqslant \frac{\sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|}{\left(|a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|\right)}$$

علت نامساوی: A غالب قطری اکید $\Rightarrow |a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| = \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}| + \sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|$

$$\Rightarrow |a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}| > \sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}| \Rightarrow \frac{\sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|} \leqslant 1$$

$\Rightarrow |\lambda| \leqslant 1$ چون λ یک مقدار ویژه دلخواه بود $\Rightarrow \rho(T_G) = \max_i |\lambda_i| \leqslant 1$

نکته: شرط غالب قطری اکید بودن ماتریس ها برای همگرایی روش های ژاکوبی و گاوس سایدل یک شرط کافی می باشد نه لازم. شرط لازم و کافی این است که $\rho(T_G) < 1$
به عبارت دیگر ممکن است در یک دستگاه A غالب قطری اکید نباشد اما روش های فوق همگرا شوند.

قضیه: اگر در دستگاه $Ax=b$ ، A یک ماتریس متقارن و مثبت معین باشد در این صورت روش گاوس سایدل برای هر حدس اولیه همگرا است.

نکته: دقت شود که در این حالت در مورد روش ژاکوبی چیزی نمی توان گفت. یعنی ممکن است روش ژاکوبی همگرا یا واگرا باشد.

اثبات قضیه: مانند قضیه قبل نشان می دهیم $\rho(T_G) < 1$.

$T_G = -(D+L)^{-1}U$

$A = L+D+U = L+D+L^T$ چون A متقارن است $(U=L^T)$

$\Rightarrow T_G = -(D+L)^{-1}L^T$ $\hookrightarrow L^T = A-(L+D)$

فرض کنید λ یک مقدار ویژه T_G و $x\neq 0$ بردار ویژه نظیر به آن است پس

$T_G x = \lambda x \Rightarrow -(D+L)^{-1}L^T x = \lambda x \Rightarrow -L^T x = \lambda (D+L) x$

$\Rightarrow -[A-(D+L)]x = \lambda(D+L)x$

$\Rightarrow Ax = (1-\lambda)(D+L)x$

$\xrightarrow[\text{در } x^T]{\text{ضرب طرفین}} x^TAx \overset{①}{=} (1-\lambda)x^T(D+L)x$

$\xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{با محاسبه ترانهاده}} x^T\underset{A}{A^T}x \overset{②}{=} (1-\lambda)x^T(D+L^T)x$

جمع روابط ① و ②. $\Rightarrow 2x^TAx = (1-\lambda)x^T(\underbrace{D+L+L^T}_{A}+D)x$

$= (1-\lambda)x^T(A+D)x$

$= (1-\lambda)x^TAx + (1-\lambda)x^TDx$

$\Rightarrow \frac{2}{1-\lambda}\overset{>0}{x^TAx} = \overset{>0}{x^TAx} + \overset{>0}{x^TDx}$

چون A متقارن مثبت معین است

چون D ماتریس قطری است که عناصر روی قطر همان عناصر قطری A هستند و یک A ماتریس مثبت معین است بنابراین همه عناصر قطری D مثبت اند پس D یک ماتریس مثبت معین خواهد شد.

موضوع: تاریخ:

نتیجه ۱ : $1-\lambda>0 \Rightarrow \lambda<1$

$\Rightarrow |\lambda|<1 \Rightarrow \rho(T_G)<1$

نتیجه ۲ : $\frac{2}{1-\lambda}>1 \Rightarrow 1-\lambda<2 \Rightarrow \lambda>-1$

مثال: نشان دهید برای $-\frac{1}{2}<a<1$ روش گاوس سایدل در حل دستگاه $Ax=b$ که ماتریس A به شکل زیر است همگرا می باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$ متقارن

$|A_1|=|1|=1>0 \qquad |A_2|=\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}=1-a^2>0 \Leftrightarrow -1<a<1$

$|A_3|=|A|=2(a+\frac{1}{2})(a-1)^2>0 \Leftrightarrow a>-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<a<1 \Rightarrow$ A مثبت معین است پس طبق قضیه قبل روش گاوس-سایدل همگرا است

مثال: آیا روش های ژاکوبی و گاوس سایدل در حل دستگاه زیر همگرا می باشند.
چگونه از همگرایی این روش ها مطمئن شویم؟

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3+x_4&=1\\ 2x_1+7x_2+x_3&=-1\\ 8x_1+2x_2+3x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3+5x_4&=3 \end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

چون A متقارن و غالب قطری اکید نیست از ظاهر دستگاه چیزی نمی توان گفت.

تاریخ: ۹۸/۹/۲ موضوع:

تعویض معادله اول و سوم :

$$\begin{aligned} 8x_1+2x_2+3x_4&=0\\ 2x_1+7x_2+x_3&=-1\\ x_1+2x_2+4x_3+x_4&=1\\ x_1+x_2+x_3+5x_4&=3 \end{aligned}$$

— اگر A قطری غالب $\Rightarrow$ هر دو روش همگرا.

روش تکراری SOR یا فوق تخفیف :

در یک روش تکراری $x^{k}=Tx^{(k-1)}+c$ شرط لازم و کافی برای همگرایی $\rho(T)<1$ بود. هر اندازه که $\rho(T)$ به 1 نزدیک باشد سرعت همگرایی کندتر و هر اندازه که $\rho(T)$ به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی بیشتری باشد. در روش گاوس سایدل یعنی $x_i^{(k)}=\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$ می‌توان با معرفی پارامتری مانند W و معرفی روشی به شکل زیر سرعت همگرایی روش را افزایش داد.

$$x_i^{(k)}=\frac{W}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]+(1-W)\,x_i^{k-1}$$

روش حاصل را روش SOR می‌گویند.

نکته: روش SOR با $W=1$ همان روش گاوس سایدل است.

شکل ماتریسی روش SOR :

$A=L+D+U$

$$a_{ii}x_i^{(k)}=W\left[b_i-\Sigma\qquad\right]+(1-W)\,a_{ii}x_i^{k-1}\qquad i=1,2,\dots,n$$

$$Dx^{(k)}=W\left[b-Lx^{k}-Ux^{k-1}\right]+(1-W)\,Dx^{(k-1)}$$

$$\Rightarrow x^{(k)}=W\left[D^{-1}b-D^{-1}Lx^{k}-D^{-1}Ux^{(k-1)}\right]+(1-W)\,x^{(k-1)}$$

$$\Rightarrow (I+WD^{-1}L)x^{k}=WD^{-1}b+\left[(1-W)-WD^{-1}U\right]x^{(k-1)}$$

موضوع: تاریخ:

$$\Rightarrow (D+WL)\,x^{(k)} = Wb + [(1-W)D - WU]\,x^{(k-1)}$$

$$\Rightarrow x^{k} = \underbrace{W(D+WL)^{-1}b}_{\text{بردار تکرار}} + \underbrace{(D+WL)^{-1}[(1-W)D - WU]}_{\text{ماتریس تکرار}}\,x^{k-1}$$

$$T_{SOR} = (D+WL)^{-1}[(1-W)D - WU]$$

نکته: مانند سایر روش های تکراری روش SOR همگرا است اگر و فقط اگر $\rho(T_{SOR})<1$

محدوده مجاز برای انتخاب مقادیر W :

قضیه: روش SOR برای $W \notin (0,2)$ یک روش واگرا است و برای سایر مقادیر $W \in (0,2)$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد

اثبات:

$$D+WL = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ Wa_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ Wa_{n1} & \cdots & Wa_{n\,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(D+L)^{-1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

$$[(1-W)D - WU] = \begin{bmatrix} (1-W)a_{11} & & -WU \\ & \ddots & \\ 0 & & (1-W)a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det[(1-W)D - WU] = (1-W)^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\det(T_{SOR}) = \det(D+WL)^{-1} \cdot \det((1-W)D - WU) = (1-W)^{n}$$

اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه T_{SOR} باشند داریم

$$\det(T_{SOR}) =$$

تاریخ:
موضوع:

$$\det(T_{SOR}) = \lambda_1 \dots \lambda_n = (1-w)^n$$

اگر $w \notin (0,2)$ در این صورت $|\lambda_1 \dots \lambda_n| > 1$ پس $\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1$

پس $\rho(T_{SOR}) > 1$ و بنابراین روش واگرا است.

چیزی در مورد λها نمی‌توان گفت. $\Leftarrow$ $|\lambda_1 \dots \lambda_n| < 1$ $\Leftarrow$ اگر $w \in (0,2)$

قضیه: اگر در دستگاه $Ax=b$، A یک ماتریس متقارن و مثبت معین باشد

در این صورت روش SOR برای $w \in (0,2)$ قطعاً همگرا است. (بدون اثبات)

قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس سه‌قطری + متقارن + مثبت معین و T_j ماتریس

تکرار روش ژاکوبی و T_G ماتریس تکرار روش گاوس سایدل. در این صورت

$$\rho(T_G) = [\rho(T_j)]^2$$

نتیجه: در این حالت سرعت همگرایی روش گاوس سایدل دو برابر روش ژاکوبی است

همچنین w بهینه در روش SOR (یعنی wای که بیشترین سرعت همگرایی را در روش

SOR نتیجه بدهد) از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$w = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(T_j)}}$$ w بهینه در روش SOR

مثال: دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

موضوع: تاریخ:

$(x_1, x_2, x_3)^T = (3, 4, -5)^T$ جواب واقعی

$$4x_1 + 3x_2 = 24$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30$$
$$-x_2 + 4x_3 = -24$$

تقریبی از جواب دستگاه فوق را با هفت تکرار از روش گاوس سایدل و هفت تکرار از روش SOR با $W = 1/25$ و حدس اولیه $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ بیابید و با یکدیگر مقایسه کنید.

روش گاوس سایدل:

$$x_1^{k} = \frac{1}{4}\left(24 - 3x_2^{(k-1)}\right)$$

$$x_2^{k} = \frac{1}{4}\left(30 - 3x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}\right)$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{4}\left(-24 + x_2^{(k)}\right)$$

k	۰	۱	...	۷
$x_1^{(k)}$	۱	۵/۲۵۰۰۰۰		۳/۰۱۳۴۱
$x_2^{(k)}$	۱	۳/۸۱۲۵۰۰		۳/۹۸۸۸۸۲
$x_3^{(k)}$	۱	-۵/۰۴۶۸۷۵		-۵/۰۰۲۷۷۹

روش SOR:

$$x_1^{(k)} = \frac{W}{4}\left(24 - 3x_2^{(k-1)}\right) + (1 - W)\, x_1^{(k-1)}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{W}{4}\left(30 - 3x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}\right) + (1 - W)\, x_2^{(k-1)}$$

$$x_3^{(k)} = \frac{W}{4}\left(-24 + x_2^{(k)}\right) + (1 - W)\, x_3^{(k-1)}$$

k	0	1	...	7
$x_1^{(k)}$	1	6/312500		3/000004
$x_2^{(k)}$	1	3/5125313		4/000250
$x_3^{(k)}$	1	-6/6501465		-5/00034

واضح است که جواب‌های محاسبه شده توسط روش SOR به جواب واقعی مساله نزدیک‌تر می‌باشد.

مثال: برای مثال قبل W بهینه در روش SOR را بیابید.

این فرمول برای زمانی است که A سه قطری + متقارن + مثبت معین

$$W = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(T_j)}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad |A_1| = 4 > 0 ,\ |A_2| = 7 > 0 ,\ |A_3| = \ > 0$$

A: سه قطری + متقارن و مثبت معین

$$T_j = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & 0 \\ & \frac{1}{4} & \\ 0 & & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - T_j| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \lambda & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - /625) \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{/625} \\ \lambda_3 = -\sqrt{/625} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho(T_j) = \sqrt{/625} \Rightarrow W = \frac{2}{1+\sqrt{1-/625}} = 1/24$$ W بهینه

جلسه نوزدهم

تاریخ ۹۸/۹/۹

موضوع

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه :

تعریف : λ یک مقدار ویژه ی ماتریس A نامیده می شود هرگاه $\exists\ x \neq 0 : Ax = \lambda x$

$\rightarrow (\lambda I - A)x = 0 \xRightarrow{x \neq 0} \det(\lambda I - A) = 0$

رابطه فوق یک چندجمله ای از درجه n به صورت زیر مشخص می کند.

چندجمله ای مشخصه ماتریس A ← $|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$

ریشه های چندجمله ای فوق مقادیر ویژه ماتریس A را نتیجه می دهند همچنین اگر λ_i یک مقدار ویژه ماتریس A باشد بردار ویژه نظیر از حل دستگاه $(\lambda_i I - A)x = 0$ حاصل می شود.

مثال : مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = 3$ بردار ویژه نظیر : $(3I - A)x = 0$ یا $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{x_1 = x_2} x = (1, 1)$

$\rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$

$\lambda_2 = 1$ بردار ویژه نظیر : $(I - A)x = 0$ یا $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{x_1 = -x_2} x = (1, -1)$

نکته : اگر x بردار ویژه نظیر λ باشد هر مضرب از x مانند αx نیز بردار ویژه است

$Ax = \lambda x \xRightarrow[\text{طرفین در } \alpha]{\text{ضرب}} A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$ یعنی αx بردار ویژه نظیر λ

شکل نمایش بردار ویژه یکتا نیست .

$\lambda = a+bi \Rightarrow (a+bi)+(a-bi)=0 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ اگر $b\neq 0$ ، λ موهومی محض
اگر $b=0$ ، λ صفر

قضیه: اگر λ یک مقدار ویژه‌ی مختلط ماتریس حقیقی A باشد در این صورت $\bar{\lambda}$ نیز یک مقدار ویژه است.

$$\exists x \neq 0: \; Ax=\lambda x \Rightarrow \overline{Ax}=\bar{\lambda}\bar{x} \Rightarrow \overset{A}{\bar{A}}\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}$$

پس $\bar{\lambda}$ نیز یک مقدار ویژه است.

قضیه: اگر λ یک مقدار ویژه‌ی مختلط ماتریس حقیقی A باشد در این صورت بردار ویژه‌ی نظیر یعنی x نیز مختلط است.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد یعنی x یک بردار حقیقی باشد قرار می‌دهیم $|x_k| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

$$\exists x \neq 0: \; Ax=\lambda x \Rightarrow x_k \neq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i \;:\; i=1,2,\dots,n \xRightarrow{i=k} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = \lambda x_k$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sum a_{kj}x_j}{\lambda}$$ یک کسر حقیقی

قضیه: اگر A یک ماتریس پادهمتقارن باشد در این صورت مقادیر ویژه A صفر یا موهومی محض می‌باشد.

$$A \text{ پادهمتقارن} \Rightarrow A^* = -A \quad \text{یا} \quad (\bar{A})^T = -A$$

فرض کنیم λ یک مقدار ویژه A باشد $\Rightarrow \exists x \neq 0: Ax=\lambda x \Rightarrow (Ax)^* = (\lambda x)^*$

$$\Rightarrow x^* \overset{-A}{A^*} = \bar{\lambda}x^* \xrightarrow[\text{در } x]{\text{ضرب طرفین}} x^*Ax \overset{(1)}{=} -\bar{\lambda}x^*x$$

$$Ax=\lambda x \xRightarrow[\text{طرفین در } x^*]{\text{ضرب}} x^*Ax \overset{(2)}{=} \lambda x^*x$$

$$(1),(2) \Rightarrow \lambda \underbrace{x^*x}_{\|x\|_2^2 \neq 0} = -\bar{\lambda}\underbrace{x^*x}_{\|x\|_2^2\neq 0} \Rightarrow \lambda = -\bar{\lambda} \Rightarrow \lambda+\bar{\lambda}=0$$

چون $x\neq 0$

(ادامه بالای صفحه)

موضوع

تاریخ

قضیه: اگر A وارون پذیر و λ یک مقدار ویژه آن باشد در این صورت $\frac{1}{\lambda}$ یک مقدار ویژه A^{-1} است با همان بردار ویژه متناظر

$$\exists x \neq 0 : \quad Ax = \lambda x \rightarrow x = \lambda A^{-1} x \rightarrow A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$$

$\frac{1}{\lambda}$ یک مقدار ویژه A^{-1} با همان بردار ویژه نظیر

قضیه: اگر λ یک مقدار ویژه A باشد در این صورت $p-\lambda$ $(p \in \mathbb{R})$ یک مقدار ویژه $pI-A$.

$$\exists x \neq 0 \quad Ax = \lambda x$$

$$\Rightarrow (pI - A)x = px - \lambda x = (p-\lambda)x$$

قضیه: مقادیر ویژه ماتریس های AB و BA یکسان می باشند.

اثبات: فرض کنیم $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه AB است. پس $\det(AB) = 0 = \det(A) \cdot \det(B)$

$$\Rightarrow \det(BA) = 0 \rightarrow$$ $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه BA

حال فرض کنیم $\lambda \neq 0$ یک مقدار ویژه AB است

$$\exists x \neq 0 : (AB)x \overset{①}{=} \lambda x \xrightarrow[\text{در } B]{\text{ضرب طرفین}} BA(Bx) = \lambda(Bx)$$

λ یک مقدار ویژه BA با بردار ویژه Bx است

$$Bx \neq 0 \xrightarrow[\text{از } ①]{\text{زیرا در غیر این صورت}} \lambda x = 0 \xrightarrow{x \neq 0} \lambda = 0 \quad \times$$

عکس این هم به طریق مشابه

قضیه: هر ماتریس مانند A در چند جمله ای مشخصه خود صدق می کند. یعنی

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$

$$\rightarrow A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_{n-1} A + c_n I = 0$$

موضوع: تاریخ:

نکته: از رابطه فوق می‌توان وارون ماتریس A را محاسبه نموده زیرا می‌توان نوشت:

$$A\left(A^{n-1}+c_1A^{n-2}+\dots+c_{n-1}I\right)=-c_nI$$

$$\Rightarrow A^{n-1}+c_1A^{n-2}+\dots+c_{n-1}I=-c_nA^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{c_n}\left(A^{n-1}+c_1A^{n-2}+\dots+c_{n-1}I\right)$$

مثال: با استفاده از قضیه فوق معکوس ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$$

$$p(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)=\lambda^2-3\lambda+2$$

$$\Rightarrow A^2-3A+2I=0\Rightarrow A(A-3I)=-2I$$

$$\Rightarrow A-3I=-2A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3I)=\dots$$

تعریف: ماتریس A را مشابه ماتریس B گویند هرگاه ماتریس وارون پذیری مانند P وجود داشته باشد به طوری که $P^{-1}BP=A$ یا $P^{-1}AP=B$

قضیه: مقادیر ویژه ماتریس‌های متشابه یکسان هستند.

اثبات: فرض کنیم λ یک مقدار ویژه A باشد پس

$$\exists x\neq 0: Ax=\lambda x \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{ضرب}} P^{-1}Ax=\lambda P^{-1}x$$

قرار دهیم $x=Py$ (واضح است که $y\neq 0$) پس در P^{-1}

$$(P^{-1}AP)y=\lambda y$$

$$\Rightarrow By=\lambda y$$ — λ یک مقدار ویژه B با بردار ویژه y است.

قضیه: مقادیر ویژه ماتریس های هرمیتی حقیقی می باشند.

اثبات: فرض کنیم λ یک مقدار ویژه A باشد. چون A هرمیتی است بنابراین

$(\bar{A})^T = A^* = A$ ، $\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x \Rightarrow (Ax)^* = (\lambda x)^*$

$$\Rightarrow x^* \overset{A}{A^*} = \bar{\lambda} x^*$$

$$\xrightarrow[]{\text{ضرب طرفین در } x} x^* A x = \bar{\lambda} x^* x \quad (1)$$

$$Ax = \lambda x \xrightarrow[x^* \text{ در}]{\text{ضرب طرفین}} x^* A x = \lambda x^* x \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \bar{\lambda} x^* x = \lambda x^* x \Rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow (a+bi) - (a-bi) = 0$$

$$\Rightarrow 2bi = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \underset{\text{عدد حقیقی}}{\lambda = a}$$

قضیه: اگر ماتریس A هرمیتی باشد در این صورت بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایز بر یکدیگر عمودند.

اثبات: فرض کنیم λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه متمایز A با بردارهای ویژه نظیر x_1 و x_2 باشند.

$\lambda_1 \to x_1$ ، $\lambda_2 \to x_2 \Rightarrow x_1, x_2 \neq 0$:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \rightarrow (Ax_1)^* = (\lambda_1 x_1)^* = x_1^* \overset{A}{A^*} = \overset{\lambda}{\bar{\lambda}_1} x_1^*$$

$$\Rightarrow x_1^* A = \lambda_1 x_1^* \xrightarrow[x_2 \text{ در}]{\text{ضرب طرفین}} x_1^* A x_2 = \lambda_1 x_1^* x_2 \quad (1)$$

$$A x_2 = \lambda_2 x_2 \xrightarrow[x_1^* \text{ در}]{\text{ضرب طرفین}} x_1^* A x_2 = \lambda_2 x_1^* x_2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \lambda_1 x_1^* x_2 = \lambda_2 x_1^* x_2 \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0 \text{ زیرا متمایزاند}} x_1^* x_2 = 0 \Rightarrow x_1^* x_2 = $$

جلسه بیستم

موضوع: تاریخ: ۹۸/۹/۱۱

نتیجه: اگر A یک ماتریس حقیقی و متقارن باشد (پس هرمیتی است) در این صورت بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایز بر یکدیگر عمود اند.

نتیجه: فرض کنید A یک ماتریس هرمیتی با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و بردارهای ویژه نظیر $x_1, \dots, x_n$ باشند قرار دهیم $y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|_2}$ و $P = [y_1, y_2, \dots, y_n]$

در این صورت P یک ماتریس متعامد است.

اثبات: $P^T P = I$ نشان می دهیم

$$\begin{bmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{bmatrix} [y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{bmatrix} y_1^T y_1 & y_1^T y_2 & \dots & y_1^T y_n \\ y_2^T y_1 & y_2^T y_2 & \dots & y_2^T y_n \\ \vdots \\ y_n^T y_1 & y_n^T y_2 & \dots & y_n^T y_n \end{bmatrix} = I$$

$$y_i^T y_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ y_i^T y_i = \frac{\|x_i\|_2^2}{\|x_i\|_2^2} = 1 & i = j \end{cases}$$

قضیه: در یک ماتریس بردارهای ویژه ی نظیر مقادیر ویژه ی متمایز مستقل خطی اند.
بدون اثبات

یعنی اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه متمایز باشند، $x_1, \dots, x_n$ مستقل خطی اند.

قضیه: اگر A یک ماتریس متقارن و مثبت معین باشد در این صورت مقادیر ویژه A همگی حقیقی و مثبت اند.

اثبات: فرض کنیم λ مقدار ویژه A باشد پس

$$\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x \Longrightarrow x^T A x = \lambda \underbrace{x^T x}_{\|x\|_2^2}$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{x^T A x > 0}{\|x\|_2^2 > 0} > 0$$

طبق قضایای قبل چون متقارن است مقادیر ویژه حقیقی اند.

موضوع: تاریخ:

قضیه: مقادیر ویژه هر ماتریس متعامد 1 یا -1 است.

$$\text{متعامد } A \longrightarrow A^T A = I \quad \text{یا} \quad A^{-1} = A^T$$

$$\lambda(A) = \lambda(A^T) = \frac{1}{\lambda(A^{-1})} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = +1 \text{ یا } \lambda = -1$$

قضیه: فرض کنیم $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه متمایز A و $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ و C یک ماتریس وارون پذیر باشد در این صورت $C^{-1}AC = D$ اگر و فقط اگر ستون های C بردارهای ویژه A باشند.

اثبات: فرض کنیم $C^{-1}AC = D$ پس $AC = CD$. قرار می دهیم $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ (ستون اول C ... ستون n ام C)

$$\Rightarrow AC \overset{(2)}{=} CD \Rightarrow [Ac_1, Ac_2, \dots, Ac_n] \overset{(1)}{=} [\lambda_1 c_1, \lambda_2 c_2, \dots, \lambda_n c_n]$$

پس $Ac_i = \lambda_i c_i$ ، $i = 1, \dots, n$ پس c_i ها یا ستون های C بردارهای ویژه A هستند.

بالعکس: فرض کنیم ستون های C بردارهای ویژه A باشند یعنی $c_i = x_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$. طبق قضایای قبل $x_1, \dots, x_n$ (در واقع $c_1, \dots, c_n$) مستقل خطی اند پس C وارون پذیر است.

$$Ac_i = \lambda_i c_i \overset{(1)}{\Longrightarrow} [Ac_1, \dots, Ac_n] = [\lambda_1 c_1, \dots, \lambda_n c_n]$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} AC = CD \xrightarrow[\text{وارون پذیر}]{C} C^{-1}AC = D$$

نکته: در این حالت ماتریس A ، یک ماتریس قطری شدنی نامیده می شود. (بنابراین اگر مقادیر ویژه A متمایز باشند، A قطری شدنی است.)

قضیه (دایره‌های گرشگورین): تعیین محدوده مقادیر ویژه

فرض کنید A یک ماتریس داده شده، c_i دایره‌ای به مرکز a_{ii} و شعاع $r = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ (قدر مطلق آن سطر)

در این صورت همه مقادیر ویژه A در $\bigcup_{i=1}^{n} c_i$ واقع می‌شوند.

اثبات: فرض کنیم λ یک مقدار ویژه‌ی A باشد پس

$$\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

فرض کنیم $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$$i = k \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k \Rightarrow \lambda x_k - a_{kk} x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj} x_j$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{kk}||x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j|$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \underbrace{\frac{|x_j|}{|x_k|}}_{\leq 1} \Rightarrow |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

$$\Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} c_i$$

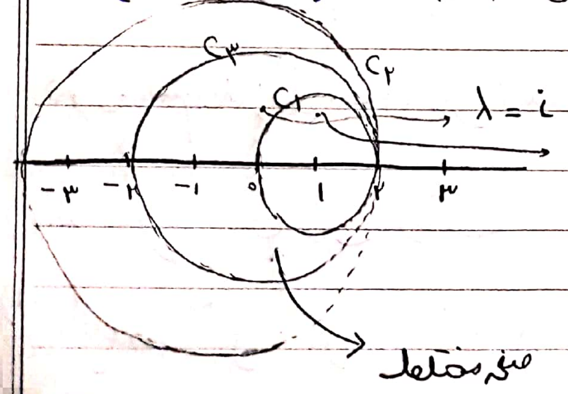
مثال: محدوده مقادیر ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c_1: دایره‌ای به مرکز ۱ و شعاع ۱ — مرکز $(1,0)$ و شعاع ۱

c_2: 〃 〃 ۱- و 〃 ۳ — $(-1,0)$ و شعاع ۳

c_3: 〃 〃 ۰ 〃 ۲ — $(0,0)$ و شعاع ۲



اگر λ روی محور حقیقی باشد مقدارش حقیقی خواهد بود وگرنه مختلط خواهد بود.

موضوع: تاریخ:

روش های عددی برای یافتن مقادیر و بردارهای ویژه:

همان طور که دیدیم برای یافتن مقادیر ویژه ابتدا باید $|\lambda I - A|$ محاسبه شود تا چندجمله‌ای مشخصه $P(\lambda)$ که یک چندجمله‌ای درجه n است حاصل شود ریشه‌های این چندجمله‌ای مقادیر ویژه ماتریس می‌باشند. بردارهای ویژه نیز از حل دستگاه $(A - \lambda I)x = 0$ حاصل می‌شود. واضح است که فرآیند فوق، فرآیند پیچیده و بسیار پرهزینه می‌باشد که برای n های بزرگ ممکن است کملاً استفاده از فرآیند فوق غیرممکن باشد. بنابراین برای ماتریس‌های بزرگ نیاز به روش‌های عددی برای یافتن تقریبی از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌باشد.

۱- روش توانی: این روش یک روش تکراری برای یافتن بزرگترین مقدار ویژه از لحاظ اندازه و بردار ویژه نظیر آن در یک ماتریس دلخواه می‌باشد با این فرض که بردارهای ویژه A مستقل خطی اند. فرض کنیم $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A و $x_1, \dots, x_n$ بردارهای ویژه A باشند که مستقل خطی اند

حالت اول: فرض کنیم بزرگترین مقدار ویژه از لحاظ اندازه یکتا باشد یا $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

فرض کنیم بردار $y^{(0)}$ یک حدس اولیه از بردار ویژه x_1 باشد. چون $x_1, \dots, x_n$ مستقل خطی اند بنابراین می‌توان نوشت $y^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ تعریف می‌کنیم $y^{(k)} = A y^{(k-1)}$ پس $y^{(k)} = A^k y^{(0)}$ پس

جلسه جدید

موضوع   تاریخ ۹۸/۸/۱۴

$$y^{(k)} = A^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^k x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i$$

$$\Rightarrow y^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y^{(k)}}{\lambda_1^k} = \alpha_1 x_1 + \lim_{k\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i$$

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \longrightarrow 0 \quad i = 2,\dots,n$$ بنابراین $$\frac{y^k}{\lambda_1^k} \xrightarrow{(1)} \alpha_1 x_1$$

بنابراین $\frac{y^k}{\lambda_1^k}$ به مضربی از x_1 همگرا است و سرعت این همگرایی بستگی به مقدار $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ دارد. هر اندازه که این عدد به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی بیشتر و هر اندازه که به ۱ نزدیک باشد سرعت همگرایی کندتری باشد.

حال به محاسبه مقدار λ_1 می‌پردازیم:

فرض کنیم v برداری ناعمود بر $y^{(k)}$ باشد.

$$\frac{v^T y^{(k+1)}}{v^T y^{(k)}} = \frac{\dfrac{v^T y^{(k+1)}}{\lambda_1^{(k+1)}}}{\dfrac{v^T y^{(k)}}{\lambda_1^k}} \lambda_1 \Rightarrow \frac{v^T y^{(k+1)}}{v^T y^{(k)}} \longrightarrow \frac{\alpha_1 x_1}{\alpha_1 x_1} \lambda_1 = \lambda_1$$

$$\frac{v^T y^{(k+1)}}{\lambda_1^{(k+1)}} \xrightarrow{(1)} \alpha_1 x_1 \qquad \frac{v^T y^{(k)}}{\lambda_1^k} \xrightarrow{(1)} \alpha_1 x_1$$

یک انتخاب برای v به صورت زیر تعیین می‌شود:

فرض کنیم $|y_p^k| = \max_{1\le i\le n} |y_i^k|$ قرار می‌دهیم $v = [0,\dots,0,1,0,\dots,0]^T$ که مؤلفه p ام

پس $v^T y^{(k)} = y_p^{(k)} \neq 0$ و به علاوه با این انتخاب

چون $y^{(k)}$ تقریبی از بردار ویژه است.

$$\frac{y_p^{(k+1)}}{y_p^{(k)}} \longrightarrow \lambda_1$$ پس $$\frac{v^T y^{(k+1)}}{v^T y^{(k)}} = \frac{y_p^{(k+1)}}{y_p^{(k)}}$$

بنابراین به طور خلاصه در روش توانی برای یافتن بزرگترین مقدار ویژه از نظر اندازه

موضوع: تاریخ:

هر بردار ویژه نظیر آن با بردار دلخواه $y^{(0)}$ شروع می کنیم و تکراری دهیم $y^{(k+1)} = Ay^{(k)}$

در این صورت طبق رابطه شماره ① $y^{(k)} \to \alpha_1 \lambda_1^{(k)} x_1$ که یک مضرب ثابتی از

مضرب ثابت

x_1 است. بنابراین $y^{(k)}$ به بردار ویژه نظیر λ_1 همگرا است همچنین طبق رابطه

شماره ② $\frac{y_p^{(k+1)}}{y_p^{(k)}} \to \lambda_1$ همگرا است

نکته: برای جلوگیری از بزرگ شدن مؤلفه های بردار $y^{(k)}$ و در نتیجه آن

ایجاد خطاهای محاسباتی بردار $y^{(k)}$ را در هر مرحله نرمال می کنیم یعنی $y^{(k)}$ بر

$\|y^{(k)}\|_\infty$ تقسیم می کنیم تا بزرگترین مؤلفه آن 1 شود. در واقع تکرار می دهیم

$x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\|y^{(k)}\|_\infty}$ ، $y^{(k+1)} = Ax^{(k)}$ و $\lambda_1 = \frac{y_p^{(k+1)}}{x_p^{(k)}}$. بنابراین به طور

خلاصه الگوریتم روش به صورت زیر بیان می شود:

Input $A, y^{(0)}, \varepsilon$

$x^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{\|y^{(0)}\|_\infty}$

for $m = 1, 2, \dots$

$y^{(m)} = Ax^{(m-1)}$

find p such that $|y_p^{(m)}| = \|y^{(m)}\|_\infty$

$\lambda_1 = \frac{y_p^{m}}{x_p^{(m-1)}}$

$x^{(m)} = \frac{\cancel{A}\, y^{(m)}}{\|y^{(m)}\|_\infty}$

If $\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| < \varepsilon$

then print $(\lambda_1, x^{(m)})$, exit

خروجی الگوریتم: $\begin{cases} \lambda_1 : \text{بزرگترین مقدار ویژه از لحاظ اندازه} \\ x_1 = x^{(m)} \quad \text{بردار ویژه نظیر} \end{cases}$

مثال: بزرگترین مقدار ویژه از لحاظ اندازه و بردار ویژه‌ی نظیر آن در ماتریس زیر را با استفاده از روش توانی و شروع اولیه داده شده بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix}, \quad y^{(0)} = (1, 1, 1)^T$$

و مقادیر ویژه A: ۴ و ۲ و ۱

$$\|y^{(0)}\|_\infty = 1 \Rightarrow x^{(0)} = y^{(0)} = (1,1,1)^T, \quad y^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$p = 3 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{y_3^{(1)}}{x_3^{(0)}} = \frac{12}{1} = 12, \quad x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_\infty} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

k	$[y^{(k)}]^T$	$[x^{(k)}]^T$	λ_1
1	$(6, 8, 12)$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1)$	12
2	$(2.3333, 3.3333, 5.3333)$	$(0.4357, 0.6245, 1)$	5.333
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
8	$(1.6049, 2.4088, 4.0126)$	$(0.4005, 0.6003, 1)$	4.0126

$\lambda_1 \simeq 4.0126$

$x_1 \simeq x^{(8)} = (0.4005, 0.6003, 1)$

(اگر λ_i مقدار ویژه A باشد λ_i^k مقدار ویژه $A^{(k)}$ اما بردار ویژه متناظر است)

تاریخ

موضوع

حالت دوم: بزرگترین مقدار ویژه از لحاظ اندازه یکتا نباشد یعنی:

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\dots=|\lambda_r|>|\lambda_{r+1}|\geq\dots\geq|\lambda_n|$$

مانند حالت قبل فرض کنیم $y^{(0)}$ یک حدس اولیه از x_1 باشد پس می‌توان نوشت

x_i ها متمایزاند

$$y^{(k)}=A^k y^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \underbrace{A^{(k)}x_i}_{\lambda_i^k x_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^k x_i \qquad y^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\lambda_1^k x_i+\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i\lambda_i^k x_i$$

$$\Rightarrow \frac{y^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i+\cancel{\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i}^{\,0}$$

$$\frac{y^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}}\Rightarrow\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i$$ ترکیب خطی از بردارهای ویژه نظیر λ_1

یعنی $\frac{y^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}}$ به یک ترکیب خطی از بردارهای ویژه نظیر λ_1 همگرا شده است. که خود یک بردار ویژه نظیر λ_1 است پس مانند حالت قبل $\frac{y^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}}$ به یکی از بردارهای ویژه نظیر λ_1 همگرا است. الگوریتم مانند قبل قابل به کارگیری است تنها با این تفاوت که چون در این حالت λ_1، r بردار ویژه نظیر دارد الگوریتم فقط یکی از این بردار ویژه‌ها را نتیجه می‌دهد.

سرعت بخشیدن به روش توانی: برای افزایش سرعت همگرایی روش توانی می‌توان از الگوریتم‌های دیگر نیز استفاده کرد.

الگوریتم اول: فرض کنیم λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه از A باشند که از بقیه‌ی مقادیر ویژه بزرگتر اند و به علاوه $\lambda_1 > \lambda_2$. برای یک عدد حقیقی P می دانیم $\lambda_1 - P$ و $\lambda_2 - P$ مقادیر ویژه ماتریس $B = A - PI$ می باشند. همچنین می دانیم سرعت همگرایی روش توانی به مقدار $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ بستگی دارد. حال اگر P را به گونه ای انتخاب کنیم که $\left|\frac{\lambda_2 - P}{\lambda_1 - P}\right|$ تا حد امکان کوچک شود در این صورت اگر روش توانی را روی ماتریس B اعمال کنیم سرعت همگرایی بسیار بیشتر خواهد شد. در حالت خاص اگر

$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ یک انتخاب مناسب برای P، λ_n است زیرا

$$\lambda_1 > \lambda_2 \rightarrow P\lambda_1 > P\lambda_2 \rightarrow -\lambda_1\lambda_2 + P\lambda_1 > -\lambda_1\lambda_2 + P\lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1(-\lambda_2 + P) > \lambda_2(-\lambda_1 + P)$$

$$\Rightarrow \frac{-\lambda_2 + P}{-\lambda_1 + P} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow \frac{\lambda_2 - P}{\lambda_1 - P} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

با اعمال روش توانی روی ماتریس B، $\lambda_1 - P$ حاصل می شود که اگر عدد حاصل را با P جمع کنیم، λ_1 حاصل می شود.

الگوریتم دوم: اگر $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ مقادیر ویژه A باشند آنگاه $|\lambda_1^k| > |\lambda_2^k| > \dots > |\lambda_n^k|$ مقادیر ویژه A^k اند. با اعمال روش روی A^k سرعت همگرایی $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ است که برای kهای بزرگ بسیار کوچکتر از $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ است بنابراین سرعت روش توانی در این حالت بسیار بیشتر خواهد شد.

جلسه جدید ۱۸ / ۹ / ۹۸

$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$

روش توانی معکوس: فرض کنید مقادیر ویژه ی ماتریس A به صورت زیر باشد

در این صورت A وارون پذیر است و مقادیر ویژه آن به صورت زیر می باشد:

$|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| > \cdots > |\lambda_2^{-1}| > |\lambda_1^{-1}|$

با اعمال روش توانی روی A^{-1}، λ_n^{-1} یا λ_n که کوچکترین مقدار ویژه A از لحاظ اندازه می باشد محاسبه می شود. تنها نکته ای که باید به آن توجه نمود این است که در هر مرحله نیاز به محاسبه ی $y^{(k)} = A^{-1} y^{(k-1)}$ است که به جای آن بهتر است دستگاه $A y^{(k)} = y^{(k-1)}$ را حل نمود. چون در هر مرحله نیاز به حل چنین دستگاهی می باشد کافی است یکبار تجزیه LU ماتریس A را محاسبه نماییم و سپس دستگاه را حل کنیم.

یافتن نزدیکترین مقدار ویژه ی A به یک عدد مانند p:

فرض کنیم p یک عدد داده شده باشد. می خواهیم مقدار ویژه ای مانند λ از A را به گونه ای بیابیم که $|\lambda - p|$ کمترین مقدار را داشته باشد. برای این کار می دانیم مقادیر ویژه ماتریس $B = A - pI$ (یا $B = pI - A$) به صورت $\lambda_i - p$ می باشد سپس با استفاده از روش توانی معکوس، کوچکترین مقدار ویژه ی ماتریس B از لحاظ اندازه را می یابیم. در نهایت با اضافه کردن p به آن λ_i مورد نظر حاصل می شود.

مثال: بزرگترین مقدار ویژه ی ماتریس زیر به کدد $P=5$ را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 11 & 16 \\ 6 & 15 & 40 \end{bmatrix}$$

حل: $B=A-PI=A-5I=\begin{bmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 16 \\ 6 & 15 & 35 \end{bmatrix}$

حال با اعمال روش توانی روی B^{-1} کوچکترین مقدار ویژه ی B از لحاظ اندازه را می‌یابیم

$y^{(0)}=[1,1,1]^T$

k	$[x^k]^T$	λ
1	$(0/7347, 1, -0/5510)$	$15/4660$
⋮		⋮
4	$(0/7660, 1, -0/5575)$	$15/5421$

بزرگترین مقدار ویژه B^{-1} از لحاظ اندازه

درنتیجه کوچکترین مقدار ویژه B از لحاظ اندازه: $\lambda=\frac{1}{15/5421}=0/0643$. بنابراین بزرگترین

مقدار ویژه ی ماتریس A به کدد $P=5$ به صورت زیر است:

$$\lambda=5+0/0643=5/0643$$

روش تقلیل ویلاند برای یافتن سایر مقادیر ویژه

همان طور که ملاحظه شد با استفاده از روش توانی بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A از لحاظ اندازه و با استفاده از روش توانی معکوس، کوچکترین مقدار ویژه ی ماتریس A از لحاظ اندازه در دار ویژه های تقلیر محاسبه شدند. روش تقلیل ویلاند، یک الگوریتم برای یافتن سایر مقادیر ویژه است با این فرض که $|\lambda_1|>|\lambda_2|>\dots>|\lambda_n|$

موضوع: تاریخ:

برای این کار در مرحله اول، ماتریسی مانند B را به گونه ای می یابیم که مقادیر ویژه آن $\lambda_n, \dots, \lambda_3, \lambda_2$ و ۰ شوند. اگر روش توانی روی ماتریس B اعمال شود λ_2 حساب می شود. در مرحله بعد، ماتریس دیگری می سازیم که مقادیر ویژه آن $\lambda_n, \dots, \lambda_3$ و ۰ و ۰ شود سپس λ_3 را می یابیم. با ادامه روند فوق همه مقادیر ویژه حاصل می شوند. اساس کار قضیه ی زیر است:

قضیه: فرض کنیم λ_1 بزرگترین مقدار ویژه ی A از لحاظ اندازه و x_1 بردار ویژه ی نظیر آن باشد. قرار می دهیم $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|_\infty}$ و فرض می کنیم بزرگترین مؤلفه ی بردار y_1 که 1 است مؤلفه kام باشد اگر W^T، سطر kام ماتریس A باشد در این صورت مقادیر ویژه ماتریس $\underset{n\times n}{B} = A - \underset{n\times 1}{[y_1]}\;\underset{1\times n}{[W^T]}$ ماتریس، $\lambda_n, \dots, \lambda_3, \lambda_2$ و ۰ می باشد.

اثبات: فرض کنیم λ یک مقدار ویژه ی A با بردار ویژه ی نظیر x باشد. در این صورت λ یک مقدار ویژه ی A^T با بردار ویژه ی نظیر Z است یعنی $A^TZ = \lambda Z$, $Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax = \lambda x \\ Z^TA = \lambda Z^T \quad (1) \end{cases}$$

دقت شود با توجه به رابطه ی فوق x را بردار ویژه ی ستونی و Z را بردار ویژه ی سطری نظیر مقدار ویژه ی λ می نامند. یعنی اگر $\lambda_n, \dots, \lambda_1$ مقادیر ویژه ی A باشند، $x_n, \dots, x_1$ بردار ویژه های ستونی و $Z_n, \dots, Z_1$ بردار ویژه های سطری اند (بردار ویژه های A^T)

ادعا می کنیم $Z_i^T y_1 = 0$ ، $i = 2, 3, \dots, n$ زیرا

موضوع: تاریخ:

$z_i^T A = \lambda_i z_i^T \xrightarrow[\text{در } y_1]{\text{ضرب طرفین}} z_i^T \underbrace{(Ay_1)}_{\lambda_1 y_1} = \lambda_i z_i^T y_1 \Rightarrow \lambda_1 z_i^T y_1 = \lambda_i z_i^T y_1$

$\Rightarrow (\lambda_1 \overset{\neq 0}{-} \lambda_i) z_i^T y_1 = 0$

$i = 2, 3, \dots, n$

$\Rightarrow z_i^T y_1 = 0 \qquad i = 2, 3, \dots, n$

$z_i^T B = z_i^T (A - y_1 w^T) = z_i^T A - \cancel{z_i^T y_1}^{0} w^T \qquad i = 2, 3, \dots, n$

$= z_i^T A \overset{1}{=} \lambda_i z_i^T \Rightarrow z_i^T B = \lambda_i z_i^T$

$\Rightarrow B^T z_i = \lambda_i z_i \quad i = 2, \dots, n$

پس λ_2 و ... و λ_n مقادیر ویژه‌ی ماتریس B^T یا ماتریس B می‌باشد.

$y_1 w^T = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$ kام $\quad w^T = \begin{bmatrix} \text{---} \\ w^T \\ \text{---} \end{bmatrix} \to$ سطر kام $\quad \Rightarrow B = A - y_1 w^T = \begin{bmatrix} \text{---} \\ 0 \; 0 \; 0 \; 0 \\ \text{---} \end{bmatrix}$ سطر kام

$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \text{---} \\ 0 \dots 0 \; \lambda \; 0 \dots 0 \\ \text{---} \end{vmatrix} \overset{2}{=} \lambda |C| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

روی قطر — سطر kام — حذف سطر kام و ستون kام

پس صفر نیز یک مقدار ویژه B و بنابراین مقادیر ویژه B: λ_n و ... و λ_2 و 0

به طور خلاصه برای یافتن دومین مقدار ویژه A از لحاظ اندازه و بردار ویژه‌ی نظیر آن ابتدا ماتریس $B = A - y_1 w^T$ را تشکیل می‌دهیم با توجه به رابطه‌ی (۲) سطر kام و ستون kام ماتریس B را حذف می‌کنیم تا ماتریس C حاصل شود با اعمال روش توانی روی ماتریس C، λ_2 و ... و λ_n حاصل می‌شوند. با ادامه فرآیند فوق بقیه مقادیر ویژه و بردار ویژه‌های نظیر حاصل می‌شوند.

جلسه جدید

تاریخ ۹۸/۹/۲۳

مثال: فرض کنیم برای ماتریس زیر، بزرگترین مقدار ویژه از نظر اندازه $\lambda_1 = 11$ و بردار ویژه نظیر $x_1 = [0/5, 1, 0/75]^T$ باشد. مطلوب است محاسبه سایر مقادیر ویژه با استفاده از روش تقلیل ویلاند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|x_1\|_\infty = 1 \Rightarrow y_1 = x_1 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow w^T = [10, 3, 4]$$

$$B = A - y_1 w^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0/5 \\ 1 \\ 0/75 \end{bmatrix}_{3\times1} [10, 3, 4]_{1\times3} = \begin{bmatrix} -3 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4/5 & 3/75 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4/5 & -2 \end{bmatrix}$$ λ_2 و λ_3 مقادیر ویژه C اند

$\Rightarrow \lambda_2 = -3$ و $\lambda_3 = -2$

برای یافتن بردارهای ویژه می‌توانیم $(A - \lambda I)x = 0$ یا $(B - \lambda I)x = 0$ را حل کنیم.

$(\lambda_2 I - B)x = 0 \Rightarrow x_2$: حاصل می‌شود.

$(\lambda_3 I - B)x = 0 \Rightarrow x_3$: حاصل می‌شود.

اگر ابعاد ماتریس بزرگ بوده، روش توانی را روی B اعمال می‌کنیم تا λ_2 و x_2 حاصل شود.

تعریف: ماتریس Q را یک ماتریس متعامد می‌نامیم هرگاه $Q^TQ = I$ یا $Q^{-1} = Q^T$

تعریف: مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ متعامد نامیده می‌شوند هرگاه

ضرب داخلی $v_i \cdot v_j = 0$ ، $i \neq j$

موضوع:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　تاریخ:

و متعامد یکه است هرگاه $v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

قضیه: اگر q_i ستون i ام ماتریس Q باشد و $Q=[q_1, q_2, \dots, q_n]$ در این صورت ماتریس Q یک ماتریس متعامد است اگر و فقط اگر ستون های Q متعامد یکه باشند یعنی $q_i \cdot q_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

اثبات:

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} [q_1, q_2, \dots, q_n] = \begin{bmatrix} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 & \cdots & q_1^T q_n \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 & \cdots & q_2^T q_n \\ \vdots & & & \\ q_n^T q_1 & q_n^T q_2 & \cdots & q_n^T q_n \end{bmatrix} \stackrel{S}{=} I \Leftrightarrow$$

$$q_i \cdot q_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

از جمله ماتریس های متعامد می توان به ماتریس دوران E_{pq} اشاره کرد. این ماتریس همان ماتریس همانی $I_{n \times n}$ است با این تفاوت که درایه:

$(p,p) \to \cos\theta$　　　$(p,q) \to \sin\theta$

$(q,p) \to -\sin\theta$　　　$(q,q) \to \cos\theta$

مثال $(E_{23})_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ یا $(E_{23})_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

موضوع: تاریخ:

روش ژاکوبی برای یافتن مقادیر ویژه ماتریس های متقارن:

می دانیم اگر D یک ماتریس قطری باشد مقادیر ویژه D، همان عناصر قطری می باشند. همچنین می دانیم اگر $P^{-1}AP = D$ در این صورت مقادیر ویژه A و D یکی (یکسان) می باشند. در روش ژاکوبی هدف پیدا کردن ماتریس P در رابطه فوق با استفاده از ماتریس های دوران است تا ماتریس قطری D حاصل شود و مقادیر ویژه A روی قطر D قرار گیرد. برای این کار در مرحله اول قرار می دهیم

$B_1 = E_{pq}^{-1} A E_{pq}$ ① . p و q به صورت زیر حاصل می شوند.

فرض کنیم a_{pq} بزرگترین مؤلفه غیر قطری A از لحاظ اندازه باشد. در این صورت ماتریس دوران E_{pq} به گونه‌ای ساخته می شود که درایه نظیر در ماتریس B_1 صفر شود یعنی $b_{pq}=0$. می توان نشان داد که از رابطه ① b_{pq} به صورت زیر است:

$$b_{pq} = (a_{pp} - a_{qq}) \sin\theta . \cos\theta + a_{pq}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$b_{pq} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{2\sin\theta . \cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}}_{\tan(2\theta)} = -\frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-2a_{pq}}{a_{pp}-a_{qq}}\right)$$

به شرطی که $a_{pp} - a_{qq} \neq 0$

و اگر $a_{pp} - a_{qq} = 0$ کافی است قرار دهیم $\theta = \frac{\pi}{4}$.

با محاسبه θ از رابطه‌ی فوق ماتریس دوران E_{pq} را تشکیل می دهیم، سپس با تشکیل رابطه ① ماتریس B_1 را محاسبه می کنیم. حتماً مؤلفه (p,q)

موضوع: تاریخ:

در ماتریس B_1 صفر خواهد شد. در مرحله بعد فرض می‌کنیم مؤلفه (r و s) بزرگترین مؤلفه‌ی غیرقطری B_1 از لحاظ اندازه باشد. مانند مرحله قبل ماتریس دوران E_{rs} را به گونه‌ای می‌یابیم که در $B_2 = E_{rs}^{-1} B_1 E_{rs} = E_{rs}^T B_1 E_{rs}$ مؤلفه (r و s) صفر شود

با ادامه فرآیند فوق تمام درایه‌های غیرقطری را صفری نماییم از این رو دنباله‌ای از ماتریس‌های دوران و ماتریس‌های $\{B_i\}$ تشکیل خواهد شد. برای راحتی کار اگر قرار دهیم $E_{pq} = E_1$ و $E_{rs} = E_2$ و ... در این صورت

$$B_1 = E_{pq}^T A E_{pq} = E_1^T A E_1$$

$$B_2 = E_{rs}^T B_1 E_{rs} = E_2^T B_1 E_2 = E_2^T E_1^T A E_1 E_2 \text{ و } \dots$$

$$B_i = E_i^T \dots E_2^T E_1^T A E_1 E_2 \dots E_i$$

اگر $P = E_1 E_2 \dots E_i \Rightarrow P^T = E_i^T \dots E_2^T E_1^T \Rightarrow B_i = P^T A P$

چون E_iها متعامدند پس $E_i^T = E_i^{-1}$ و بنابراین

$$P^{-1} = E_i^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} = E_i^T \dots E_2^T E_1^T = P^T \Rightarrow B_i = P^{-1} A P$$

یعنی A با ماتریس قطری B_i متشابه است.

دقت شود که فرض بر این است که در مرحله i ام همه درایه‌های غیرقطری B_i تقریباً صفر شده اند و بنابراین عناصر قطری B_i همان مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند

نکته: طبق قضیه‌ای که قبلاً بیان کردیم $P^{-1} A P = D$ است (که عناصر قطری D مقادیر ویژه A هستند) اگر و فقط اگر ستون‌های P بردارهای ویژه A باشد. بنابراین کلیدی

موضوع:　　　　　　　　　　　　تاریخ:

بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس A محاسبه می‌شوند.

مثال: مطلوب است محاسبه همه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر ماتریس متقارن زیر به روش ژاکوبی.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

بزرگترین درایه غیرقطری A از نظر اندازه: $a_{13}=-2 \Rightarrow p=1,\ q=3$

$$E_{13}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & & \cos\theta\end{bmatrix}\ ;\ B_1=E_{13}^{T}AE_{13}$$

$$a_{pp}-a_{qq}=a_{11}-a_{33}=-1+2=1\neq 0$$

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-2a_{13}}{a_{11}-a_{33}}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{1}\right)=0.663$$

$$E_{13}=\begin{bmatrix}0.788 & 0 & 0.615\\ 0 & 1 & 0\\ -0.615 & 0 & 0.788\end{bmatrix}\Rightarrow B_1=\begin{bmatrix}0.562 & 2.019 & 0\\ 2.019 & -1 & -0.961\\ 0 & -0.961 & -3.562\end{bmatrix}$$

بزرگترین درایه غیرقطری B_1 از نظر اندازه: $b_{21}=b_{12}=2.019$

$$\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-2b_{12}}{b_{11}-b_{22}}\right)=-0.601\ ;\ E_{12}=\begin{bmatrix}0.825 & -0.565 & 0\\ 0.565 & 0.825 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B_2=E_{12}^{T}B_1E_{12}=\begin{bmatrix}1.946 & 0 & -0.543\\ 0 & -2.384 & -0.793\\ -0.543 & -0.793 & -3.593\end{bmatrix}$$

با ادامه فرآیند در مرحله ششم:

$$B_6=E_{23}^{T}B_5E_{23}=\begin{bmatrix}\overset{\lambda_1}{2.000} & 0 & 0\\ 0 & \overset{\lambda_2}{-2.000} & 0\\ 0 & 0 & \overset{\lambda_3}{-4.000}\end{bmatrix}$$

جلسه جدید

تاریخ ۹۸/۹/۲۵

$$P = E_{13}E_{12}E_{23}E_{21}E_{32} = \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} .577 & -.707 & .408 \\ .577 & .707 & .408 \\ -.577 & 0 & .816 \end{bmatrix}$$

تمرین: یک مرحله از روش ژاکوبی برای یافتن مقادیر ویژه ماتریس زیر را اجرا کنید

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

۹۸/۹/۲۵ دوشنبه

مقادیر ویژه ماتریس های سه قطری و متقارن:

$j = i+1$ بالای قطر

$j = i-1$ پایین قطر

ماتریس A یک ماتریس سه قطری نامیده می شود هرگاه $|i-j|>1$ آنگاه $a_{ij}=0$

ماتریس سه قطری و متقارن زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ c_1 & b_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & c_{n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

می دانیم $|\lambda I - A| = (-1)^n |A - \lambda I| = 0$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} b_1-\lambda & c_1 & & \\ c_1 & b_2-\lambda & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & c_{n-1} & b_n-\lambda \end{vmatrix}$$

تعریف می کنیم

$$P_k(\lambda) = \begin{vmatrix} b_1-\lambda & c_1 & & 0 \\ c_1 & b_2-\lambda & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & c_{k-1} \\ 0 & & c_{k-1} & b_k-\lambda \end{vmatrix}$$

با بسط دترمینان فوق بر حسب سطر آخر داریم:

$$P_k(\lambda) = (b_k-\lambda)\,P_{k-1}(\lambda) - C_{k-1}\begin{vmatrix} b_1-\lambda & C_1 & & & 0\\ C_1 & b_2-\lambda & C_2 & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C_{k-3} & b_{k-2}-\lambda & 0\\ & & & C_{k-2} & C_{k-1}\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P_k(\lambda) \overset{①}{=} (b_k-\lambda)\,P_{k-1}(\lambda) - C_{k-1}^2\,P_{k-2}(\lambda)$$

واضح است که $P_1(\lambda) = |b_1-\lambda| = b_1-\lambda$. همچنین قرار می‌دهیم $P_0(\lambda) = 1$

زیرا

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} b_1-\lambda & c_1\\ c_1 & b_2-\lambda\end{vmatrix} = (b_1-\lambda)(b_2-\lambda) - c_1^2$$

$$\overset{①}{=} (b_2-\lambda)\underbrace{P_1(\lambda)}_{b_1-\lambda} - c_1^2\,P_0(\lambda) \Rightarrow P_0(\lambda) = 1$$

به طور خلاصه: $P_k(\lambda) = (b_k-\lambda)\,P_{k-1}(\lambda) - c_{k-1}^2\,P_{k-2}(\lambda)$, $k = 2, 3, \dots, n$

و $P_0(\lambda) = 1$, $P_1(\lambda) = b_1-\lambda$

مثال: با استفاده از رابطه‌ی فوق چند جمله‌ای مشخصه ماتریس زیر را یافته و از روی آن مقادیر ویژه ماتریس را محاسبه کنید.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix} \end{array}$$

$P_0(\lambda) = 1$, $P_1(\lambda) = 3-\lambda$

$$P_2(\lambda) = (b_2-\lambda)P_1(\lambda) - c_1^2 = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5$$

$$P_3(\lambda) = (b_3-\lambda)P_2(\lambda) - c_2^2\,P_1(\lambda) = \dots \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3\\ \lambda_2 = 1\\ \lambda_3 = 4\end{cases}$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 5) - (3-\lambda) =$$

موضوع:

تاریخ

قضیه: با استفاده از رابطه بازگشتی شماره (1) مقادیر ویژه ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

به صورت زیر است: $k=1,2,\dots$ $\lambda_k(A)=a-2\sqrt{bc}\,\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$

روش گیونز برای سه قطری کردن ماتریس های متقارن:

در این روش با استفاده از ماتریس های دوران E_{pq} ماتریس های متقارن را به یک ماتریس سه قطری متقارن و متشابه با ماتریس اولیه تبدیل می کنیم و سپس مقادیر ویژه ماتریس حاصل را با استفاده از رابطه بازگشتی گفته شده می یابیم.

اگر قرار دهیم $B=E_{pq}^T A E_{pq}$ می توان نشان داد که رابطه بین مؤلفه های A و B به صورت زیر باشد: $k\neq p,q$

$b_{kp}=b_{pk}=a_{pk}\cos\theta-a_{qk}\sin\theta$

حال اگر بخواهیم درایه نظیر a_{pr} در ماتریس B یعنی b_{pr} (که $r\neq p,q$) صفر شود باید

$$b_{pr}=a_{pr}\cos\theta-a_{qr}\sin\theta=0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{a_{pr}}{a_{qr}} \Rightarrow \theta \overset{(1)}{=} \tan^{-1}\left(\frac{a_{pr}}{a_{qr}}\right)$$

می خواهیم ماتریس متقارن $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ را به یک ماتریس سه قطری

تبدیل کنیم. برای این کار در ستون اول باید درایه های $a_{31}, \dots, a_{n1}$، در ستون دوم درایه های $a_{42}, \dots, a_{n2}$ تا الی آخر صفر شوند. با استفاده از رابطه شماره (1) برای صفر کردن هر مؤلفه

یک ماتریس دوران نظیری سازیم و در A از سمت چپ ضرب می کنیم چون A متقارن است اگر ماتریس دوران از سمت راست نیز در ماتریس A ضرب شود درایه های سطری نظیر نیز صفر خواهند شد یعنی اگر بتوانیم در ستون اول a_{31} ⋮ a_{n1} را صفر کنیم؛ در این صورت با ضرب ماتریس دوران از سمت راست $a_{13} \dots a_{1n}$ صفر می شوند. توجه شود که فرآیند فوق را تا ستون $n-2$ ادامه می دهیم. همچنین دقت شود اگر درایه ای که قرار است صفر شود a_{pr} باشد در این صورت $p > r+1$ و لذا $p \neq r$ همچنین برای اینکه شرط $q \neq r$ برقرار شود قرار می دهیم $q = r+1$ سپس با یافتن ماتریس دوران E_{pq} درایه نظیر را صفر می کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم درایه a_{31} صفر شود: نیاز به ساخت ماتریس دوران E_{32} است

$a_{31}: p=3, r=1 \Rightarrow q=2 \Rightarrow$

$a_{42}:$ $\Rightarrow$ نیاز به ساخت ماتریس دوران E_{43} است.

با انجام فرآیند فوق برای همه مؤلفه هایی که باید صفر شوند و ضرب ماتریس های دوران از چپ و راست ماتریس متقارن A به یک ماتریس سه قطری و متقارن و متشابه با A تبدیل می شود.

مثال: با استفاده از روش گیونز ماتریس متقارن زیر را به یک ماتریس سه قطری و متقارن و متشابه با A تبدیل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

موضوع: تاریخ:

باید درایه‌های $a_{31} = a_{13} = 2$ ، صفر شود. برای این منظور درایه a_{31} را در نظر می‌گیریم.

$$a_{31}: \quad p = 3,\ r = 1 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow E_{pq} = E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_{31}}{a_{21}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & +\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow B = E_{32}^T A E_{32} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{10}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{10}{\sqrt{5}} & \frac{28}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{32}{5} \end{bmatrix}$$

که تنها ماتریس سه‌قطری و متقارن و متشابه با A است و مقادیر ویژه آن را با بسط چند جمله‌ای مشخصه از رابطه بازگشتی گفته شده می‌توان به دست آورد.

تمرین:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_{31}: \quad p = 3,\ r = 1 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow E_{pq} = E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_{31}}{a_{21}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{10}} , \quad \sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{3} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \Rightarrow B = E_{32}^T A E_{32} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

جلسه جدید

موضوع: تاریخ: ۹۸/۹/۳۰

ماتریس های هوس - هلدر:

فرض کنید $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ یک بردار در $\mathbb{R}^n$ به گونه ای باشد که $\|v\|_2 = 1$ در این صورت ماتریس $P = I - 2vv^T$ را یک ماتریس هوس-هلدری نامیم.

دقت شود که

$$vv^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} [v_1, v_2, \dots, v_n] = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & \cdots & v_1v_n \\ v_2v_1 & v_2^2 & \cdots & v_2v_n \\ \vdots & & & \\ v_nv_1 & v_nv_2 & \cdots & v_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = I - 2vv^T = \begin{bmatrix} 1-2v_1^2 & -2v_1v_2 & \cdots & -2v_1v_n \\ -2v_2v_1 & 1-2v_2^2 & \cdots & -2v_2v_n \\ \vdots & & & \\ -2v_nv_1 & -2v_nv_2 & \cdots & \boxed{1-2v_n^2} \end{bmatrix}$$

هوس هلدر n

نکته: هر ماتریس هوس هلدر یک ماتریس متقارن و متعامد است زیرا

$$P^T = (I - 2vv^T)^T = I - 2vv^T = P$$

$\|v\|_2^2 = 1$

$$P^TP = (I - 2vv^T)(I - 2vv^T) = I - 2vv^T - 2vv^T + 4v(v^Tv)v^T = I$$

همچنین اگر r-مؤلفه اول v صفر باشد یعنی $v_1 = v_2 = \dots = v_r = 0$ در این صورت ماتریس P به صورت زیر قابل بیان است.

$$P_r = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & u \end{bmatrix}$$

$$u = I - 2ww^T \qquad w = [v_{r+1}, \dots, v_n]^T$$

اگر ماتریس P_r را از سمت چپ در ماتریس A ضرب کنیم یعنی P_rA را تشکیل دهیم در این صورت r سطر اول A در ماتریس حاصل بدون تغییر باقی می مانند

$$P_rA = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & u \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \equiv \\ \\ \end{pmatrix}$$ r سطر اول بدون تغییر

همچنین اگر P_2 از سمت راست در A ضرب شود در این صورت ۲ ستون اول A بدون تغییر باقی می ماند بنابراین در ماتریس $B = P_2^T A P_2 = \left(\;\; I_{2\times2}\right)$ در ماتریس ماتریس پیشرو ۲×۲ بدون تغییر باقی می ماند. همچنین دقت شود که A و B متشابه اند و اگر A متقارن باشد B نیز متقارن خواهد شد.

$$B^T = P_2^T \underbrace{A^T}_{A} P_2 = B$$

برخی خواص دیگر ماتریس های هوس هلدر در زیر بیان می شود:

فرض کنیم $S = \text{Span}\{v\}$ و فضای متعامد بر S (S اعضای S مضاربی از v هستند) $= S^{\perp}$ در این صورت $\mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$

یعنی اگر $x \in \mathbb{R}^n$ که $x = x_R + x_N$ ، $x_R \in S$ و $x_N \in S^{\perp}$

قضیه: اگر P یک ماتریس هوس-هلدر باشد در این صورت

الف) $Px = -x$ برای $x \in S$

ب) $Px = x$ برای $x \in S^{\perp}$

اثبات: اگر $x \in S$ در این صورت $\exists \alpha : x = \alpha v$ پس

$$Px = (I - 2vv^T)(\alpha v) = \alpha v - 2\alpha v \underbrace{(v^T v)}_{1} = -\alpha v = -x$$

ب) اگر $x \in S^{\perp}$ در این صورت $\underset{\text{دات ضرب داخلی}}{v \cdot x} = v^T x = 0$

$$Px = (I - 2vv^T)x = x - 2v\underbrace{v^T x}_{0} = x$$

نتیجه: اگر $x = \overset{\in S}{x_R} + \overset{\in S^{\perp}}{x_N}$ در این صورت $Px = -x_R + x_N$

$$Px = Px_R + Px_N = -x_R + x_N$$

بعدی ۱ است و بعد $S^{\perp}$ ، $n-1$ است

موضوع: تاریخ:

۳) P دارای یک مقدار ویژه ی -1 و $n-1$ مقدار ویژه ی $+1$ است. (از خاصیت ۱ و ۲)

۴) هر ماتریس متعامد مانند P نرم دو بردار را تغییر نمی دهد $\forall x\in\mathbb{R}^n \quad \|Px\|_2=\|x\|_2$

مثل ماتریس های دوران

$$\|Px\|_2^2=(Px)^T Px = x^T\underbrace{P^TP}_{I}x = x^Tx = \|x\|_2^2$$

تبدیل یک ماتریس متقارن به یک ماتریس سه قطری متقارن با استفاده از ماتریس های هوس - هلدر :

این کار را برای یک ماتریس 4×4 توضیح می دهیم و تعمیم آن به حالت کلی را بیان می کنیم. ماتریس متقارن زیر را در نظر می گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix} \qquad A=A^T \text{ یا } a_{ij}=a_{ji}$$

ابتدا از ستون اول شروع می کنیم می خواهیم ماتریس هوس-هلدر P_1 را به گونه ای بیابیم که

$$P_1A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24}\\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34}\\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44}\end{bmatrix}$$ قرار دهیم.

$$W=[w_1, w_2, w_3]^T, \quad U=I-2WW^T, \quad P_1=\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & & & \\ 0 & & U & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

کافی است

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & & & \\ 0 & & U & \\ 0 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\\ a_{41}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}\\ a'_{21}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad P_1\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\\ a_{41}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}\\ a'_{21}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

بنابراین بیاز داریم $u\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. قرار می‌دهیم $d = [d_1, d_2, d_3]^T = [a_{21}, a_{31}, a_{41}]^T$

پس می‌خواهیم $ud \overset{①}{=} \begin{pmatrix} a'_{21} \\ \vdots \end{pmatrix}$. می‌دانیم $\|ud\|_2 = \|d\|_2$

$$① \Rightarrow \|ud\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} a'_{21} \\ \vdots \end{pmatrix} \right\|_2 \Rightarrow \|d\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} a'_{21} \\ \vdots \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} = |a'_{21}|$$

اگر $S = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ پس $a'_{21} = \pm S$. فعلاً قرار می‌دهیم $a'_{21} = S$. از آنجایی که

$$ud = \begin{pmatrix} a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (I - 2ww^T)d = \begin{pmatrix} a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{در } w^T]{\text{ضرب طرفین}}$$

$$(w^T - 2\underbrace{w^Tw}_{1}w^T)d = w^T \begin{pmatrix} a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -w^Td = w_1 \overset{S}{a'_{21}}$$

فرض کنیم $w^Td = b$ عدد پس $b = -w_1S$

مجدداً : $ud = \begin{pmatrix} a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (I - 2ww^T)d = \begin{pmatrix} a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ یا

$$d - 2w\overset{b}{(w^Td)} = \begin{pmatrix} a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} - 2b\underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}}_{\text{مجهولات}} = \begin{pmatrix} a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d_1 - 2\overset{-w_1S}{b}w_1 = \overset{S}{a'_{21}} \Rightarrow d_1 + 2w_1^2S = S \Rightarrow 2w_1^2S = S - d_1$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d_1}{S}\right)}$$

معادله دوم : $d_2 - 2bw_2 = 0 \Rightarrow w_2 = \dfrac{d_2}{2b}$

معادله سوم : $d_3 - 2bw_3 = 0 \Rightarrow w_3 = \dfrac{d_3}{2b}$ $\quad b = -Sw_1$

به طور خلاصه: می خواهیم $u = I - 2ww^T$ که

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & u_{3\times 3} \\ 0 & \end{pmatrix}}_{P_1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a'_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و $w = (w_1, w_2, w_3)$.

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} \Longrightarrow S = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$$

$$w_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d_1}{S}\right) \qquad b = -Sw_1$$

$$\operatorname{sign}(S) = -\operatorname{sign}(d_1)$$

$$w_2 = \frac{d_2}{2b}, \quad w_3 = \frac{d_3}{2b}$$

با محاسبه w_1 و w_2 و w_3 از روابط فوق ماتریس P_1 را تشکیل می دهیم سپس اگر قرار دهیم

$$B_1 = P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix}$$

در مرحله دوم باید a'_{42} و a'_{24} صفر شوند. برای این کار ماتریس P_2 را به صورت زیر درنظر می گیریم:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & u \end{pmatrix} \qquad u = I - 2ww^T; \quad w = (w_1, w_2)$$

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{32} \\ a'_{42} \end{pmatrix}, \quad S = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \quad \operatorname{sign}(S) = -\operatorname{sign}(d_1)$$

$$w_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d_1}{S}\right); \quad b = -Sw_1 \qquad w_2 = \frac{d_2}{2b}$$

اگر $B_2 = P_2^T B_1 P_2$ در این صورت B_2 یک ماتریس سه قطری و متشابه با A خواهد شد.

$$B_2 = P_2^T B_1 P_2 = P_2^T P_1^T A \overbrace{P_1 P_2}^{P} = P^T A P$$

جلسه جدید

تاریخ: ۹۸/۱۰/۲

موضوع:

نکته: تعمیم الگوریتم فوق به ماتریس‌ها با ابعاد بالاتر به طور مشابه امکان پذیر باشد.

مثال: ماتریس متقارن زیر را به روش هوس‌-هلدر سه‌قطری کنید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۳ & ۵ \\ ۴ & ۵ & -۱ \end{pmatrix}$$

می‌خواهیم P_1 را به گونه‌ای بیابیم که
$$P_1A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ * & * & * \\ ۰ & * & * \end{bmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & & \\ ۰ & & u \end{pmatrix} \qquad u=I-۲ww^T \; ; \; w=(w_1, w_۲) \; ;$$

$$d=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix} \; , \; S=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$\text{Sign}(S)=-\text{sing}(d_1) \Rightarrow S=-۵$$

$$w_1^۲=\frac{1}{۲}\left(1-\frac{d_1}{S}\right)=\frac{1}{۲}\left(1+\frac{۳}{۵}\right)=\frac{۴}{۵} \Rightarrow w_1=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$b=-Sw_1=۵\cdot\frac{۲}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵} \; ; \; w_۲=\frac{d_۲}{۲b}=\frac{۴}{۴\sqrt{۵}}=\frac{1}{\sqrt{۵}}$$

$$u=I-۲ww^T=I-۲\begin{bmatrix} w_1 \\ w_۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 & w_۲ \end{bmatrix}=I-۲\begin{bmatrix} w_1^۲ & w_1w_۲ \\ w_1w_۲ & w_۲^۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1-۲w_1^۲ & -۲w_1w_۲ \\ -۲w_1w_۲ & 1-۲w_۲^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۵} & -\frac{۴}{۵} \\ -\frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_1=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۳}{۵} & -\frac{۴}{۵} \\ ۰ & -\frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{pmatrix} \; ; \; B_1=P_1^TAP_1=\begin{bmatrix} ۱ & -۵ & ۰ \\ -۵ & \frac{۱۳۱}{۲۵} & \frac{۸۳}{۲۵} \\ ۰ & \frac{۸۳}{۵۵} & -\frac{۸۱}{۲۵} \end{bmatrix}$$

مثال: بردار $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ داده شده است. ماتریس ماندم P را به گونه‌ای بیابید که $P_{4\times4}\, x = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$P_{4\times4} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & u_{44} \end{array}\right] \Rightarrow P = u$$

$$\Rightarrow P = I - 2ww^T \qquad w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \sqrt{d_1^2 + \dots + d_4^2} = \sqrt{4} = 2 \quad , \ \mathrm{sign}(S) = -\mathrm{sign}(d_1) \Rightarrow S = 2$$

درایه‌هایی که می‌خواهیم صفر شوند، یعنی آخر

$$w_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d_1}{S}\right) = \dots$$

$$b = -S w_1 \qquad \text{خودت}$$

$$w_i = \frac{d_i}{2b} \qquad i = 2, 3, 4$$

$$P = I - 2ww^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} , \quad Px = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تمرین: با استفاده از ماتریس‌های هوس‌هلدر ماتریس زیر را به یک ماتریس سه‌قطری تبدیل کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

تمرین: بردار $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ داده شده است. ماتریس P را به گونه‌ای بیابید که $Px = \begin{bmatrix} 2 \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $Px = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $Px = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$

تجزیه QR :

هر ماتریس مربعی $m\times m$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب یک ماتریس متعامد مانند Q در یک ماتریس بالا مثلثی مانند R نوشت. یعنی می‌توان نوشت $A=QR$ که به این تجزیه تجزیه QR می‌گویند. این تجزیه بدون هیچ شرطی برای هر ماتریس مربعی وجود دارد. برای پیدا کردن این تجزیه از ماتریس‌های هوس هلدر استفاده می‌کنیم. فرض کنیم

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

. ابتدا ماتریس هوس هلدر P_1 را به گونه‌ای می‌سازیم که

$$P_1 = I - 2ww^T \quad , \quad R_1 = P_1 A = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$w=(w_1,\dots,w_n)^T$$

$$d=(d_1,\dots,d_n)^T=(a_{11},a_{21},\dots,a_{n1})^T$$

در مرحله دوم ماتریس P_2 را به گونه‌ای می‌سازیم که

$$R_2 = P_2 R_1 = \begin{bmatrix} a'_{11} & \cdots & & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & 0 & a''_{33} \cdots & a''_{3n} \\ 0 & 0 & a''_{n3} \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix}$$

و

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & u & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad , \quad u = I - 2ww^T \ , \ w=(w_1,\dots,w_{n-1})^T$$

$$d=(d_1,\dots,d_{n-1}) = (a'_{22}, a'_{32},\dots,a'_{n2})^T$$

با ادامه روند فوق تا مرحله $n-1$ ام ماتریس P_{n-1} را به گونه‌ای می‌سازیم که

$$R_{n-1} = P_{n-1} R_{n-2} = \begin{bmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots\ 0 & a^*_{nn} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس بالا مثلثی

P یک ماتریس متعامد است

چون P_i ها متعامد اند

یعنی $PP^T = I$

پس به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$R_{n-1} = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1 A$$

$$\Longrightarrow A = \underbrace{P^T}_{Q} \underbrace{R_{n-1}}_{R}$$