مبانی آنالیز ریاضی

سید سیف‌اله موسی‌زاده

دانشگاه کاشان– دانشکدهٔ علوم ریاضی

فصل اول: دستگاه اعداد حقیقی

آنالیز حقیقی به بررسی عددهای حقیقی، مجموعه‌هایی از عددهای حقیقی و تابع‌هایی که روی مجموعه‌هایی از عددهای حقیقی تعریف می‌شوند، می‌پردازد.

بنابراین در این فصل، ویژگی‌هایی از اعداد حقیقی را بیان می‌کنیم و به بعضی از روابط و نامساوی‌های مهم بین آنها می‌پردازیم.

* **تعریف (هیأت یا میدان):** مجموعه‌ای ناتهی مانند F از اشیائی که دو عمل جمع و ضرب روی آنها تعریف می‌شود با ویژگی‌های زیر را یک هیأت یا میدان می‌نامیم:

۱- برای هر $x,y \in F$، $x+y \in F$ ؛ ← بسته بودن F نسبت به عمل جمع

۲- برای هر $x,y \in F$، $x+y=y+x$ ؛ ← خاصیت جابجایی نسبت به عمل جمع

۳- برای هر $x,y,z \in F$، $(x+y)+z=x+(y+z)$ ← شرکت‌پذیری نسبت به عمل جمع

۴- F عضوی مانند 0 دارد که برای هر $x \in F$، $x+0=x$ ؛ ← به 0 عضو خنثی عمل جمع می‌گویند

۵- برای هر $x \in F$، y ای در F وجود دارد که $x+y=0$ ؛ ← y را قرینه x است یعنی $y=-x$

۶- برای هر $x,y \in F$، $xy \in F$ ؛ ← بسته بودن F نسبت به عمل ضرب

۷- برای هر $x,y,z \in F$، $(xy)z=x(yz)$ ؛ ← شرکت‌پذیری نسبت به عمل ضرب

۸- برای هر $x,y \in F$، $xy=yx$ ؛ ← جابجایی نسبت به عمل ضرب

۹- F عضوی مانند 1 دارد که برای هر $x \in F$، $x.1=x$ ؛ ← به 1 عضو خنثی عمل ضرب می‌گویند

۱۰- برای هر $x \in F$ که $x \neq 0$، y ای وجود دارد در F که $xy=1$ ؛ ← y را وارون x می‌گویند

۱۱- برای هر $x,y,z \in F$، $x(y+z)=xy+xz$ ← خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری) ضرب نسبت به جمع

مثال: مجموعه اعداد گویا یعنی Q با جمع و ضرب معمولی، یک میدان است (؟)

مثال: مجموعه اعداد حقیقی یعنی R با جمع و ضرب معمولی یک میدان است (؟)

مثال: مجموعه اعداد طبیعی یعنی N با جمع و ضرب معمولی، یک میدان نیست، زیرا ویژگی ۴ را ندارد (البته ویژگی‌های ۵ و ۱۰ را نیز ندارد).

همچنین مجموعه اعداد صحیح یعنی Z نیز با جمع و ضرب معمولی، یک میدان نیست، زیرا ویژگی ۱۰ را ندارد.

← فقط یک نماد است و اینکه چگونه تعریف می‌شود، بستگی به مسئله دارد!

* تعریف (ترتیب): ترتیب $<$ روی مجموعهٔ S، رابطه‌ای است که دو ویژگی زیر را داشته باشد:

۱- اگر $x,y\in S$، آنگاه دقیقاً یکی از رابطه‌های $x<y$ ، $x=y$ یا $y<x$ درست است.

۲- برای هر $x,y,z\in S$، اگر $x<y$ و $y<z$ آنگاه $x<z$.

مجموعهٔ مرتب مجموعه‌ای است که ترتیبی روی آن تعریف شده است. (مثلاً در مجموعه‌ها، زیرمجموعه بودن می‌تواند رابطهٔ ترتیب باشد)

مثال: مجموعهٔ اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) با رابطهٔ $<$ معمولی، یک مجموعهٔ مرتب است. همچنین $\mathbb{N}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$.

مثال: فرض کنید $S=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$. S را به همراه رابطهٔ $\subset$ (زیرمجموعه بودن) در نظر بگیرید. بنابراین:

اولاً: برای هر $x,y\in S$، همهٔ حالت‌های ممکن برای x و y به صورت زیر است:

$\begin{cases} x=\{1\} \\ y=\{1\} \end{cases} \rightsquigarrow x=y$ ، $\begin{cases} x=\{1\} \\ y=\{1,2\} \end{cases} \rightsquigarrow x\subset y$ ، $\begin{cases} x=\{1,2\} \\ y=\{1\} \end{cases} \rightsquigarrow y\subset x$ ، $\begin{cases} x=\{1,2\} \\ y=\{1,2\} \end{cases} \rightsquigarrow x=y$

$\begin{cases} x=\{1\} \\ y=\{1,2,3\} \end{cases} \rightsquigarrow x\subset y$ ، $\begin{cases} x=\{1,2,3\} \\ y=\{1\} \end{cases} \rightsquigarrow y\subset x$ ، $\begin{cases} x=\{1,2,3\} \\ y=\{1,2,3\} \end{cases} \rightsquigarrow x=y$ ، $\begin{cases} x=\{1,2\} \\ y=\{1,2,3\} \end{cases} \rightsquigarrow x\subset y$

$\begin{cases} x=\{1,2,3\} \\ y=\{1,2\} \end{cases} \rightsquigarrow y\subset x$.

ثانیاً: برای هر $x,y,z\in S$، اگر $x\subset y$ و $y\subset z$ آنگاه $x\subset z$ (؟ ← بررسی شود!)

بنابراین S به همراه $\subset$ یک مجموعهٔ مرتب است.

* تعریف (میدان مرتب): میدانی مانند F که مجموعه‌ای مرتب باشد و ویژگی‌های اضافهٔ زیر را نیز داشته باشد، یک میدان مرتب نامیده می‌شود:

۱- اگر $x>0$ و $y>0$ آنگاه $x+y>0$؛

۲- اگر $x>0$ و $y>0$ آنگاه $xy>0$؛

۳- $x<y$ اگر و فقط اگر $y-x>0$.

مثال: $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ به همراه جمع و ضرب معمولی، میدان‌های مرتب هستند.

مثال: نشان دهید بین هر دو عدد گویای متمایز، عددی گویا وجود دارد.

حل) فرض کنید $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد گویای متمایز باشند و $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. نشان می‌دهیم میانگین این دو عدد یعنی $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$ عددی گویا بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ است. برای این کار داریم:

اولاً: چون $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ و $\frac{1}{2} \in Q$ و Q نسبت به جمع بسته است پس $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \in Q$ و بنابراین $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) \in Q$. ✓

ثانیاً: $\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$ ، زیرا:

از فرض $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{a}{b}+\frac{a}{b} < \frac{a}{b}+\frac{c}{d} \longrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a}{b}+\frac{c}{d} \longrightarrow \frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$ ✓

به طور مشابه می‌توان نشان داد $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$. (?)

بدین ترتیب از اولاً و ثانیاً، حکم مسأله به دست می‌آید.

مثال: ثابت کنید مجموع عددی گویا و عددی گنگ، گنگ است.

حل) فرض کنیم $x=\frac{a}{b}$ عددی گویا و y عددی گنگ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $x+y$ عددی گنگ است. برای این کار، با برهان خلف، فرض می‌کنیم $x+y$ گنگ نباشد پس $x+y$ گویاست. یعنی اعداد صحیحی مانند c و d یافت می‌شوند به طوری که $x+y=\frac{c}{d}$. بنابراین

$$x+y=\frac{c}{d} \longrightarrow y=\frac{c}{d}-x=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd} \in Q \longrightarrow y \in Q \longrightarrow y \text{ عددی گویاست}$$

این با فرض اینکه y عددی گنگ است در تناقض است.

مثال: ثابت کنید $\sqrt{2}$ گنگ است.

حل) برهان خلف: فرض کنید $\sqrt{2}$ گنگ نیست پس $\sqrt{2}$ گویاست. بنابراین اعدادی صحیح مانند a و b که $\underbrace{(a,b)=1}_{1}$ وجود دارند که $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. بنابراین

$$(\sqrt{2})^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \longrightarrow 2=\frac{a^2}{b^2} \longrightarrow \underset{\in Z}{a^2}=2\underset{\in Z}{b^2} \longrightarrow \underbrace{a^2 \text{ عددی زوج است}}_{2}$$

پس چون a عددی صحیح و a^2 عددی زوج است پس a خود عددی صحیح زوج است. بنابراین عددی صحیح مانند K وجود دارد که $\underbrace{a=2K}_{3}$. با جایگذاری 3 در 2 داریم

$$2b^2=(2K)^2 \longrightarrow 2b^2=4K^2 \longrightarrow \underset{\in Z}{b^2}=2\underset{\in Z}{K^2} \longrightarrow b^2 \text{ عددی زوج است}$$

پس b عدد صحیح زوج است یعنی عددی صحیح مانند K' وجود دارد که $\underbrace{b=2K'}_{4}$. بنابراین از 3 و 4 داریم

$$(a,b)=(2K,2K') \neq 1 \longrightarrow$$ با 1 در تناقض است

فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ باطل است و لذا $\sqrt{2}$ گنگ است.

K, K' اعدادی صحیح هستند

* ویژگی‌های بیشتری از اعداد حقیقی :

۱- اگر a و b و c متعلق به $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) باشند آنگاه:

الف) اگر $a\neq 0$ آنگاه $\frac{1}{a}\neq 0$ و $\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$ (وارونِ وارونِ هر عدد = خود عدد)؛

ب) اگر $a.b=a.c$ و $a\neq 0$ آنگاه $b=c$ (یعنی به نوعی، طرفین بر عدد $a\neq 0$ تقسیم شد)؛

ج) اگر $a.b=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$.

۲- قبلاً ثابت کردیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است و گویا نیست. پس عدد گویایی مانند r وجود ندارد که $r^2=2$ (زیرا در غیر اینصورت باید $r=\sqrt{2}$ یا $r=-\sqrt{2}$ باشد و این یعنی r عددی گنگ است و گویا نیست).

۳- اگر $a\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ آنگاه $a^2>0$.

۴- فرض کنید $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. در این صورت:

الف) اگر $a>b$ آنگاه $a+c>b+c$؛

ب) اگر $a>b$ و $c>0$ آنگاه $ca>cb$؛

ج) اگر $a>b$ و $c<0$ آنگاه $ca<cb$؛

د) اگر $a>0$ آنگاه $\frac{1}{a}>0$
اگر $a<0$ آنگاه $\frac{1}{a}<0$

۵- الف) اگر $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$ آنگاه $a<\frac{a+b}{2}<b$؛

ب) اگر $b\in\mathbb{R}$ و $b>0$ آنگاه $0<\frac{b}{2}<b$.

۶- الف) اگر $ab>0$ آنگاه $(a>0$ و $b>0)$ یا $(a<0$ و $b<0)$؛

ب) اگر $ab<0$ آنگاه $(a>0$ و $b<0)$ یا $(a<0$ و $b>0)$.

۷- فرض کنید $a\geq 0$ و $b\geq 0$ آنگاه: $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2 \Longleftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$

مثال: مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 2x+3\leq 6\}$ را تعیین کنید.

حل) $2x+3\leq 6 \xrightarrow[\text{اضافه } -3]{\text{به طرفین}} 2x\leq 6-3 \longrightarrow 2x\leq 3 \longrightarrow x\leq \frac{3}{2}$

بنابراین $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq \frac{3}{2}\}=(-\infty,\frac{3}{2}]$

مثال: مجموعهٔ $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+x>2\}$ را تعیین کنید.

حل) $x^2+x>2 \longrightarrow x^2+x-2>0 \longrightarrow (x+2)(x-1)>0 \longrightarrow (x+2>0$ و $x-1>0)$ یا $(x+2<0$ و $x-1<0)$

$\longrightarrow (x>-2$ و $x>1)$ یا $(x<-2$ و $x<1)$

$x>1=$ اشتراک ؛ اجتماع ؛ اشتراک $=x<-2$

$\longrightarrow x>1$ یا $x<-2$

$\Rightarrow B=\{x\in\mathbb{R} \mid x>1$ یا $x<-2\}$

$\Longrightarrow B=(1,\infty)\cup(-\infty,-2)$

مثال: مجموعهٔ $C=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{2x+1}{x+2}<1\}$ را تعیین کنید.

حل)

$$\frac{2x+1}{x+2}<1 \longrightarrow \frac{2x+1}{x+2}-1<0 \longrightarrow \frac{2x+1-x-2}{x+2}<0 \longrightarrow \frac{x-1}{x+2}<0$$

$\longrightarrow (x-1>0\,,\ x+2<0)$ یا $(x-1<0\,,\ x+2>0) \longrightarrow \underbrace{(x>1\,,\ x<-2)}_{\text{اشتراک} = \text{تهی} = \emptyset}$ یا $\underbrace{(x<1\,,\ x>-2)}_{\text{اشتراک} = -2<x<1}$

اجتماع

$\longrightarrow -2<x<1$

$\Longrightarrow C=\{x\in\mathbb{R} \mid x\in\emptyset$ یا $-2<x<1\} = \emptyset \cup (-2,1) = (-2,1) = \{x\in\mathbb{R} \mid -2<x<1\}$

* قدرمطلق‌ها ، بازه‌ها ، نابرابری‌ها:

* تعریف: اگر x عددی حقیقی باشد آنگاه قدرمطلق x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x\geq 0 \\ -x & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

* قضیه: تابع قدرمطلق، ویژگی‌های زیر را دارد:

(الف) $\forall a\in\mathbb{R}: -|a| \leq a \leq |a|$

(ب) $\forall a,b\in\mathbb{R}: |ab| = |a||b|$

(ج) $\forall a\in\mathbb{R}: |-a| = |a|$

(د) فرض کنید $c>0$ ، در این صورت

$$|a|<c \Longleftrightarrow -c<a<c$$

و همچنین

$$|a|\leq c \Longleftrightarrow -c\leq a\leq c$$

* قضیه (نامساوی مثلث): برای هر دو عدد حقیقی a و b رابطهٔ زیر برقرار است:

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

اثبات) فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند. پس طبق ویژگی (الف) قضیه قبل داریم

$$\left.\begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} -|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$$

$$\Longrightarrow -(\overbrace{|a|+|b|}^{\geq 0}) \leq a+b \leq |a|+|b| \xrightarrow[\text{قضیه قبل}]{\text{از قسمت (د)}} |a+b| \leq |a|+|b|$$

که نقش c قسمت (د) قضیه قبل

* **قضیه** (نامساوی مثلث برعکس) : برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$$

اثبات) می‌دانیم که

$$\begin{cases} |a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \overset{\text{از نامساوی مثلث}}{\le} |a-b|+|b| \longrightarrow |a| \le |a-b|+|b| \\ |b| = |b-a+a| = |b-a+a| \underset{\text{از نامساوی مثلث}}{\le} |b-a|+|a| = |a-b|+|a| \longrightarrow |b| \le |a-b|+|a| \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |a|-|b| \le |a-b| \\ |b|-|a| \le |a-b| \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{در } -1} -|b|+|a| \ge -|a-b| \longrightarrow |a|-|b| \ge -|a-b| \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |a|-|b| \le |a-b| \\ -|a-b| \le |a|-|b| \end{cases} \Longrightarrow -|a-b| \le |a|-|b| \le |a-b| \underset{\text{قسمت (د)}}{\overset{\text{از}}{\Longrightarrow}} \big||a|-|b|\big| \le |a-b|. \checkmark$$

≥ 0

نقش b در قسمت (د)

* **قضیه**: فرض کنید x عددی حقیقی است. اگر برای هر عدد مثبت مانند ε، داشته باشیم $|x|<\varepsilon$، آنگاه $x=0$.

اثبات) برهان خلف: فرض کنید $x \neq 0$، پس $|x|>0$. پس $\frac{|x|}{2}>0$. اکنون ε را $\frac{|x|}{2}$ اختیار می‌کنیم. بنابراین طبق فرض، برای $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ داریم

$$|x| < \varepsilon \Longrightarrow |x| < \frac{|x|}{2} \longrightarrow$$ این یک تناقض است. $\longrightarrow$ پس باید $x=0$ باشد.

* **تعریف** (بازه) : مجموعهٔ S از اعداد حقیقی را یک بازه می‌نامیم هرگاه:

اولاً: S حداقل شامل دو عضو (دو عدد) باشد؛

ثانیاً: برای هر دو نقطهٔ x و y در S، هر عدد حقیقی بین x و y نیز در S باشد.

* **قضیه**: هر بازه به شکل یکی از نُه گونهٔ زیر است:

① $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

② $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

③ $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

④ $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

⑤ $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < a\}$

⑥ $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \le a\}$

⑦ $(b,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid b < x < \infty\}$

⑧ $[b,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid b \le x < \infty\}$

⑨ $(-\infty,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$

* مجموع هندسی:

تعریف: یک مجموع هندسی، مجموعی به صورت $a+ar+ar^2+\cdots+ar^n$ است که در آن r و a اعداد حقیقی و n عددی طبیعی است.

* قضیه (مجموع هندسی): اگر a و r اعداد حقیقی باشند و n عددی طبیعی و $a\neq 0$ و $r\neq 1$، آنگاه

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n=\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

اثبات) فرض کنید

مجموع سمت چپ حکم $= S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } r \text{ طرفین}} rS=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n+ar^{n+1}$$

طرفین از هم کم

$$\Rightarrow S-rS=a-ar^{n+1}\Rightarrow S(1-r)=a(1-r^{n+1})\Rightarrow S=\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

* تعریف: فرض کنید a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی نامنفی باشند و n عددی طبیعی. در این صورت

میانگین حسابی a_1 و a_2 و ... و a_n $=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

میانگین هندسی a_1 و a_2 و ... و a_n $=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

* لم: فرض کنید n عددی طبیعی و $n\geq 2$ و همچنین فرض کنید b_1 و b_2 و ... و b_n اعداد حقیقی و مثبت باشند که حداقل یکی از آن‌ها با بقیه متفاوت باشد. اگر $b_1b_2\cdots b_n=1$ آنگاه

$$b_1+b_2+\cdots+b_n>n$$

به عبارتی یعنی

میانگین حسابی b_1 و b_2 و ... و b_n $=\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}>1$

* توضیح: لم فوق می‌گوید هرگاه $n\geq 2$ و b_1 و b_2 و ... و b_n اعداد حقیقی مثبت باشند که حداقل یکی از آن‌ها با بقیه متفاوت باشد، اگر

میانگین هندسی b_1 و ... و b_n $=1$، آنگاه:

میانگین حسابی b_1 و ... و b_n >1

* **قضیه** (نامساوی میانگین حسابی_میانگین هندسی): فرض کنید n عددی طبیعی و $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی و نامنفی باشند. آنگاه

≥ 0

$$(a_1a_2a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

یعنی: میانگین هندسی x_iها $\le$ میانگین حسابی x_iهای نامنفی

لازم به ذکر است که تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

اثبات) ① اگر $a_1=a_2=\cdots=a_n$، آنگاه تساوی به وضوح برقرار است، زیرا اگر $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$ آنگاه،

سمت چپ $= a \le$ سمت راست $= a$. ✓

② اگر $n=1$ آنگاه،

سمت چپ $=(a_1)^{\frac{1}{1}}=a_1 \le$ سمت راست $=\frac{a_1}{1}=a_1$. ✓

و یا اگر حداقل یکی a_kها صفر باشد، آنگاه سمت چپ $=0 \le$ سمت راست که ≥ 0 است ✓

③ اگر $n \ge 2$، همهٔ a_kها مثبت باشند و حداقل یکی از a_kها با بقیه متفاوت باشد در این صورت با فرض $(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=r$ داریم

$$a_1a_2\cdots a_n=r^n \Rightarrow \frac{a_1a_2\cdots a_n}{r^n}=1 \to \frac{a_1}{r}\cdot\frac{a_2}{r}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{r}=1$$

همگی اعداد حقیقی و مثبت و حداقل یکی با بقیه متفاوت و حاصلضربشان برابر ۱ است

پس شرایط لم قبلی برای اعداد $\frac{a_1}{r}, \frac{a_2}{r}, \dots, \frac{a_n}{r}$ فراهم است و لذا طبق لم قبل،

$$\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r}+\frac{a_3}{r}+\cdots+\frac{a_n}{r}>n$$

$$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{r}>n \to \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>r \to \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$ ✓

مثال: فرض کنید x و y عددهای مثبت باشند. در هر یک از حالت‌های زیر، بیشترین مقدار حاصلضرب xy را بیابید.

(الف) $4x+9y=36$

حل) چون $x>0$ و $y>0$ پس $4x>0$ و $9y>0$. با انتخاب $a_1=4x$ و $a_2=9y$ و با به کارگیری نامساوی میانگین حسابی_میانگین هندسی داریم

$$\sqrt[2]{a_1a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2} \to \sqrt{(4x)(9y)} \le \frac{4x+9y}{2} \to \sqrt{36xy} \le \frac{36}{2}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{xy} \le 18 \to \sqrt{xy} \le 3 \to xy \le 9 \Rightarrow$$ بیشترین مقدار $xy = 9$

ب) $4x^2+9y=36$

حل)

به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم

$$4x^2+9y=36 \to 4x^2+\frac{9y}{2}+\frac{9y}{2}=36$$

$$9y \to \frac{9y}{2}+\frac{9y}{2}$$

$a_1\ge 0$ ، $a_2\ge 0$ ، $a_3\ge 0$

حال با انتخاب $a_1=4x^2$ ، $a_2=\frac{9y}{2}$ ، $a_3=\frac{9y}{2}$ و از نامساوی میانگین حسابی - میانگین هندسی داریم

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \le \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \to \sqrt[3]{(4x^2)(\tfrac{9y}{2})(\tfrac{9y}{2})} \le \frac{4x^2+\frac{9y}{2}+\frac{9y}{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{81x^2y^2} \le \frac{36}{3} \to \sqrt[3]{81}\,\sqrt[3]{x^2y^2} \le 12 \to \sqrt[3]{(xy)^2} \le \frac{12}{\sqrt[3]{81}}$$

$$\Rightarrow (xy)^{\frac{2}{3}} \le \frac{12}{\sqrt[3]{81}} \xrightarrow[\text{توان } \frac{3}{2}]{\text{طرفین به}} xy \le \left(\frac{12}{\sqrt[3]{81}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \to$$ بیشترین مقدار $xy = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

مثال: فرض کنید x و y اعداد مثبت هستند. کمترین مقدار مجموع $4x+9y$ را تحت شرط $x^2y^3=100$ بیابید.

حل)

$$4x+9y = 2x+2x+3y+3y+3y$$

به دو قسمت مساوی تقسیم — به سه قسمت مساوی تقسیم

$a_1\ge 0$ ، $a_2\ge 0$ ، $a_3\ge 0$ ، $a_4\ge 0$ ، $a_5\ge 0$

با انتخاب $a_1=2x$ ، $a_2=2x$ ، $a_3=3y$ ، $a_4=3y$ ، $a_5=3y$ و از نامساوی میانگین حسابی - میانگین هندسی داریم

$$\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5} \le \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{(2x)(2x)(3y)(3y)(3y)} \le \frac{2x+2x+3y+3y+3y}{5} \to \sqrt[5]{108x^2y^3} \le \frac{4x+9y}{5}$$

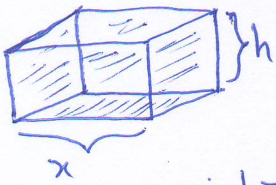
$$\Rightarrow \sqrt[5]{108\times 100} \le \frac{4x+9y}{5} \to 5\sqrt[5]{10800} \le 4x+9y \to$$ کمترین مقدار $4x+9y = 5\sqrt[5]{10800}$

مثال: کمترین مقدار مساحت کل جعبهٔ مستطیلی بدون دری را پیدا کنید که قاعده‌اش مربعی و حجم آن، مقدار ثابت V است.

حل) فرض کنیم

طول ضلع قاعدهٔ مربعی $= x$

ارتفاع جعبه $= h$



$S =$ مساحت کل جعبهٔ بدون درب (یعنی جعبه سقف ندارد) $=$ قاعده $+ \, 4$ دیوار $= x^2 + 4xh \longrightarrow$ کمترین مقدار $S = ?$

طبق فرض سؤال: مقدار ثابت و معلوم $V =$ حجم جعبه ، پس:

مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $= V \Rightarrow x^2h = V$

بنابراین برای یافتن کمترین مقدار $S = x^2 + 4xh$ ، با انتخاب $a_1 = x^2$ و $a_2 = 2xh$ و $a_3 = 2xh$ داریم:

$a_1 \geq 0$ ، $4xh = 2xh + 2xh$ ، $a_2 \geq 0$ ، $a_3 \geq 0$

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \leq \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \longrightarrow \sqrt[3]{(x^2)(2xh)(2xh)} \leq \frac{x^2+2xh+2xh}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{4x^4h^2} \leq \frac{S}{3} \Rightarrow 3\sqrt[3]{4x^4h^2} \leq S \Rightarrow 3\sqrt[3]{4V^2} \leq S$$

$(x^2h)^2 = V^2 =$ مقداری ثابت و معلوم

بنابراین:

کمترین مقدار $S = 3\sqrt[3]{4V^2}$

* قضیه (نامساوی کوشی - شوارتز): اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ اعدادی حقیقی باشند آنگاه:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \qquad \text{(الف)}$$

یعنی: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$

ب) همچنین تساوی در الف وقتی و فقط وقتی اتفاق می‌افتد که عددی حقیقی مانند s وجود داشته باشد که برای $i = 1, 2, \dots, n$: $a_i = sb_i$

اثبات) می‌دانیم برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\forall x \in \mathbb{R}: (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \dots + (a_n - b_nx)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: (a_1^2 - 2a_1b_1x + b_1^2x^2) + \dots + (a_n^2 - 2a_nb_nx + b_n^2x^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}: \underbrace{(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)}_{\text{فرض}\,=\,A}x^2 \underbrace{-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)}_{\text{فرض}\,=\,B}x+\underbrace{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}_{\text{فرض}\,=\,C}\geq 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}: Ax^2+Bx+C\geq 0$$

$\longrightarrow$ یک نامعادله درجهٔ ۲ برحسب x که شرط برقراری این نامعادله آن است که $A\geq 0$ و $\Delta\leq 0$. پس باید

همه برقرار است ✓

$$\Delta=B^2-4AC\leq 0 \Rightarrow 4(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2-4(b_1^2+\cdots+b_n^2)(a_1^2+\cdots+a_n^2)\leq 0$$

$$\Rightarrow (a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leq (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2). \checkmark$$

اثبات قسمت (الف) قضیه کامل می‌شود. ✓

اکنون برای اثبات قسمت (ب) قضیه داریم:

فرض کنیم عدد $s\in\mathbb{R}$ وجود دارد که برای $i=1,2,\ldots,n$: $a_i=sb_i$. نشان می‌دهیم که در (الف) حالت تساوی اتفاق می‌افتد. برای این کار،

$$\text{سمت چپ حکم (الف)}=(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2=\big((sb_1)b_1+(sb_2)b_2+\cdots+(sb_n)b_n\big)^2$$

$$=(sb_1^2+sb_2^2+\cdots+sb_n^2)^2=s^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^2 \qquad (*)$$

$$\text{سمت راست حکم (الف)}=(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)=(s^2b_1^2+s^2b_2^2+\cdots+s^2b_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

$$=s^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

$$=s^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)^2 \qquad (**)$$

بنابراین از $(*)$ و $(**)$ به دست می‌آوریم که: سمت راست حکم (الف) $=$ سمت چپ حکم (الف) ✓

اکنون فرض می‌کنیم در حکم (الف)، تساوی برقرار است. نشان می‌دهیم که عددی مانند $s\in\mathbb{R}$ وجود دارد که برای $i=1,2,\ldots,n$:
$a_i=sb_i$

برای این کار، با فرض اینکه در حکم (الف) حالت تساوی برقرار است، نتیجه می‌گیریم که در رابطهٔ (۲)، $Ax^2+Bx+C=0$ را برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم، یعنی $\Delta=0$. پس معادلهٔ $Ax^2+Bx+C=0$ ریشهٔ مضاعف $\frac{-B}{2A}$ دارد. با انتخاب $s=\frac{-B}{2A}$ و جایگذاری $x=s=\frac{-B}{2A}$ در رابطهٔ (۱) به دست می‌آوریم که:

$$(a_1-b_1s)^2+(a_2-b_2s)^2+\cdots+(a_n-b_ns)^2=0$$

$$\Rightarrow a_1-b_1s=0 \;,\; a_2-b_2s=0 \;,\; \cdots \;,\; a_n-b_ns=0$$

$$\Rightarrow \quad i=1,2,3,\dots,n \;\; \text{برای} \;:\; a_i=sb_i \quad \checkmark$$

* تمرین (نامساوی مثلث در $\mathbb{R}^n$): نشان دهید اگر n عددی طبیعی و $a_1,\dots,a_n$ و $b_1,\dots,b_n$ اعدادی حقیقی باشند آنگاه:

الف) $$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

یعنی: $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

که در آن $|\vec{a}+\vec{b}|$

$\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$\vec{b}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$

ب) تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که عددی مانند $s\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد که برای $i=1,2,\dots,n$:
$$a_i=sb_i$$

---

* تعریف (مجموعه‌های از بالا کراندار، از پایین کراندار، کراندار):

مجموعهٔ $A\subset\mathbb{R}$ را از بالا کراندار می‌گوییم هرگاه عددی مانند $M\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\forall x\in A: x\le M$

در این صورت، M را یک کران بالا برای A می‌نامیم.

مجموعهٔ $A\subset\mathbb{R}$ را از پایین کراندار می‌گوییم هرگاه عددی مانند $m\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\forall x\in A: m\le x$

در این صورت m را یک کران پایین برای A می‌نامیم.

همچنین $A\subset\mathbb{R}$ را کراندار می‌نامیم هرگاه اعداد حقیقی m و M وجود داشته باشند که $\forall x\in A: m\le x\le M$

(البته $A\subset\mathbb{R}$ را کراندار می‌نامیم هرگاه عدد حقیقی M وجود داشته باشد که و یا به طور معادل: $\forall x\in A: |x|\le M$)

مثال: $A=(-\infty,7]$ از بالا کراندار است. زیرا: $\forall x\in A: x\le \underbrace{7}_{\text{نقش } M}$

مثال: $B=[-2,\infty)$ از پایین کراندار است. زیرا: $\forall x\in B: \underbrace{-2}_{\text{نقش } m}\le x$ و یا اینکه $\forall x\in B: \underbrace{-10}_{\text{نقش } m}\le x$

مثال: مجموعهٔ $C=\mathbb{N}$ از پایین کراندار است. زیرا: $\forall x\in \mathbb{N}: \underbrace{1}_{\text{نقش } m}\le x$ (یا: $\forall x\in \mathbb{N}: \underbrace{0}_{\text{نقش } m}\le x$)

$$(a_1-b_1s)^2+(a_2-b_2s)^2+\cdots+(a_n-b_ns)^2=0$$

$$\Rightarrow a_1-b_1s=0 \;,\; a_2-b_2s=0 \;,\; \cdots \;,\; a_n-b_ns=0$$

$$\Rightarrow \quad i=1,2,3,\ldots,n \quad \text{برای} \;:\; a_i=sb_i \quad \checkmark$$

* تمرین (نامساوی مثلث در $\mathbb{R}^n$): نشان دهید اگر n عددی طبیعی و $a_1,\ldots,a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ اعدادی حقیقی باشند آنگاه:

(الف)
$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

یعنی: $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ که در آن $|\vec{a}+\vec{b}|$

$\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

$\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$

(ب) تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که عددی مانند $s\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد که برای $i=1,2,\ldots,n$:
$$a_i=sb_i$$

---

* تعریف (مجموعه‌های از بالا کراندار، از پایین کراندار، کراندار):

مجموعهٔ $A\subset\mathbb{R}$ را از بالا کراندار می‌گوییم هرگاه عددی مانند $M\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد که
$$\forall x\in A:\ x\le M$$
در این صورت، M را یک کران بالا برای A می‌نامیم.

مجموعهٔ $A\subset\mathbb{R}$ را از پایین کراندار می‌گوییم هرگاه عددی مانند $m\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد که
$$\forall x\in A:\ m\le x$$
در این صورت m را یک کران پایین برای A می‌نامیم.

همچنین $A\subset\mathbb{R}$ را کراندار می‌نامیم هرگاه اعداد حقیقی m و M وجود داشته باشند که
$$\forall x\in A:\quad m\le x\le M$$
(البته $A\subset\mathbb{R}$ را کراندار می‌نامیم هرگاه عدد حقیقی M وجود داشته باشد که $\forall x\in A: |x|\le M$) و یا به طور معادل:

مثال: $A=(-\infty,7]$ از بالا کراندار است. زیرا: $\forall x\in A:\ x\le 7$ (M نقش)

مثال: $B=[-2,\infty)$ از پایین کراندار است. زیرا: $\forall x\in B:\ -2\le x$ (m نقش) و یا مثلاً $\forall x\in B:\ -10\le x$ (m نقش)

مثال: مجموعهٔ $C=\mathbb{N}$ از پایین کراندار است. زیرا: $\forall x\in\mathbb{N}:\ 1\le x$ (m نقش) (یا: $\forall x\in\mathbb{N}:\ 0\le x$ (m نقش))

مثال: مجموعهٔ $D=(-2,7]$ کراندار است. زیرا:

$\forall x\in D: -2<x\le 7$

نقش m   نقش M

(یا: $\forall x\in D: -100\le x\le 18$)   نقش m   نقش M

(یا: $\forall x\in D: |x|\le 9$)   نقش M

مثال: مجموعهٔ $A=\{\frac{x}{x+1} \mid x>0\}$ کراندار است. زیرا:

$\forall x\in A: \quad 0<\frac{x}{x+1}<1 \Longrightarrow \forall a\in A: 0<a<1$

نقش m   نقش M

★ تعریف (سوپریمم و اینفیمم): فرض کنید $S\subseteq \mathbb{R}$ ناتهی باشد.

(الف) می‌گوییم عدد β، سوپریمم مجموعهٔ از بالا کراندار S است هرگاه:

اولاً: β یک کران بالا برای S باشد،

ثانیاً: اگر $\gamma<\beta$ آنگاه γ یک کران بالای S نباشد.

در این صورت $\beta=\sup S$ نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، β کوچکترین کران بالای S است.

سوپریمم S

(ب) می‌گوییم عدد α، اینفیمم مجموعهٔ از پایین کراندار S است هرگاه:

اولاً: α یک کران پایین برای S باشد،

ثانیاً: اگر $\gamma>\alpha$، γ یک کران پایین S نباشد.

در این صورت $\alpha=\inf S$ نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، α بزرگترین کران پایین S است.

اینفیمم S

مثال: سوپریمم و اینفیمم مجموعه‌ها زیر را در صورت وجود مشخص کنید:

(1) $A=[0,2]$

حل (الف) چون A از بالا کراندار است پس $\sup A$ وجود دارد. همچنین $\sup A=2$. زیرا:

اولاً: $\forall x\in A: x\le 2 \longrightarrow$ ۲ یک کران بالای A است

ثانیاً: اگر $\gamma<2 \longrightarrow$ γ یک کران بالای A نیست

بنابراین: $\sup A =$ کوچکترین کران بالای A $=2$

(ب) همچنین چون A از پایین کراندار است پس $\inf A$ وجود دارد. همچنین $\inf A=0$. زیرا:

اولاً: $\forall x\in A: 0\le x \longrightarrow$ ۰ یک کران پایین برای A است

ثانیاً: اگر $0<\gamma \longrightarrow$ γ یک کران پایین A نیست

پس: $\inf A=0$

② $B=(0,2)$ → مجموعهٔ B کراندار است → B هم sup و هم inf دارد

→ $\sup B=2$ و $\inf B=0$ → برهان شبیه مثال ①

③ $C=\{\frac{1}{2}, -\pi, \frac{4}{7}, 5, 12, \frac{\sqrt{3}}{2}, -2\}$ → $\beta=\sup C=12$ و $\alpha=\inf C=-\pi$

چون ماکزیمم C — چون مینیمم

C مجموعه‌ای متناهی است لذا کراندار است ← از بالا کراندار است ← sup دارد

از پایین کراندار است ← inf دارد

* تذکر: اگر مجموعهٔ S دارای ماکزیمم باشد آنگاه $\sup S=\max S$، همچنین اگر مجموعهٔ S دارای مینیمم باشد آنگاه $\inf S=\min S$.

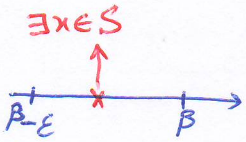
* اصل کمال: هر $S\subseteq\mathbb{R}$ ناتهی و از بالا کراندار S، دارای سوپریمم است.

* نتیجه: هر $S\subseteq\mathbb{R}$ ناتهی و از پایین کراندار S، دارای اینفیمم است. زیرا: اگر S از پایین کراندار باشد آنگاه $-S$ از بالا کراندار است و لذا طبق اصل کمال، $-S$ دارای سوپریمم است و بنابراین $\inf S=-\sup(-S)$ موجود است.

تمرین کتاب

تذکر: $\inf\emptyset$ و $\sup\emptyset$ وجود ندارند یعنی مجموعهٔ $\emptyset$، اینفیمم و سوپریمم ندارد.

* لم 1: فرض کنید β یک کران بالای مجموعهٔ ناتهی S در $\mathbb{R}$ باشد در اینصورت



$$\beta=\sup S \iff \forall\varepsilon>0, \exists x\in S: \beta-\varepsilon<x$$

برهان: اثبات $\Rightarrow$:

فرض کنیم $\beta=\sup S$، پس برای هر $\varepsilon>0$، $\beta-\varepsilon<\beta$. بنابراین چون $\beta=\sup S$ و ($\beta-\varepsilon<\beta$)

پس $\beta-\varepsilon$ یک کران بالا برای S نیست. این یعنی $\exists x\in S: \beta-\varepsilon<x$. ✓

اثبات $\Leftarrow$:

فرض کنیم β یک کران بالای S ① و ② $\forall\varepsilon>0, \exists x\in S: \beta-\varepsilon<x$. ثابت می‌کنیم $\beta=\sup S$.

برای این کار، کافی است نشان دهیم $\gamma<\beta$، آنگاه γ یک کران بالا برای S نیست.

برای این کار،

چون $\gamma<\beta \to \beta-\gamma>0 \to$ با انتخاب $\varepsilon=\beta-\gamma$ و از ② نتیجه می‌گیریم که

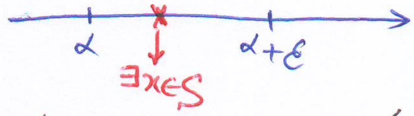
$$\exists x\in S: \beta-\varepsilon<x \to \beta-(\beta-\gamma)<x \to \gamma<x$$

این یعنی γ یک کران بالا برای S نیست ③

از ①، ③ و تعریف sup $\Longrightarrow$ $\beta=\sup S$. ✓

* لم ۲ (تمرین): فرض کنید α یک کران پایین مجموعهٔ ناتهی S در $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت

$$\alpha = \inf S \iff \forall \varepsilon > 0 ,\ \exists x \in S : x < \alpha + \varepsilon$$



مثال: فرض کنید $S \subset \mathbb{R}$ ناتهی و از بالا کراندار باشد و $a \in \mathbb{R}$. تعریف می‌کنیم $a+S = \{a+x \mid x \in S\}$.

نشان می‌دهیم $\sup(a+S) = a + \sup S$.

اثبات) نشان می‌دهیم

(i) $\sup(a+S) \leq a + \sup S$ (ii) $a + \sup S \leq \sup(a+S)$

اثبات (i): فرض کنید $\sup S = \beta$. پس

$\forall x \in S : x \leq \beta \implies \forall x \in S : a + x \leq a + \beta \implies$ همهٔ عناصر $a+S \leq a+\beta$

$\implies$ $a+\beta$ یک کران بالا برای $a+S$ است $\implies \sup(a+S) \leq a + \beta = a + \sup S$. ✓

اثبات (ii): فرض کنید γ یک کران بالای $a+S$ باشد پس

$\forall x \in S : a + x \leq \gamma \implies \forall x \in S : x \leq \gamma - a \implies$ همهٔ عناصر $S \leq \gamma - a$

$\implies$ $\gamma - a$ یک کران بالای S است $\implies \sup S \leq \gamma - a \implies \sup S + a \leq \gamma$

حال چون این نامساوی برای هر γ کران بالای $a+S$ ، درست است پس برای $\gamma = \sup(a+S)$ نیز درست است یعنی

$\sup S + a \leq \sup(a+S)$. ✓

لذا از (i) و (ii) نتیجه می‌گیریم $\sup(a+S) = a + \sup S$. ✓

۱

* ادامه مطالب فصل اول (ارائه سوپریمم و اینفیمم):

مثال: فرض کنید $A \subseteq B \subset \mathbb{R}$، A و B ناتهی و کراندارند. ثابت کنید:

الف) $\sup A \le \sup B$. ب) $\inf B \le \inf A$.

(خلاصه: $\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$)

اثبات (الف):

توجه: عددی ثابت است و خودش یک کران بالای B

$$\left.\begin{array}{l} \text{اولاً: } \forall b\in B;\ b \le \underbrace{\sup B}_{\text{عددی ثابت}} \\ \text{ثانیاً: } \forall a\in A \xrightarrow{\text{چون } A\subseteq B} a\in B \end{array}\right\} \Rightarrow \forall a\in A;\ a \le \sup B \longrightarrow \text{یک کران بالای } A \text{ است } \underbrace{\sup B}_{\text{عددی ثابت}} \longrightarrow \sup A \le \sup B. \checkmark$$

طبق تعریف $\sup$

اثبات (ب):

توجه: عددی ثابت است و خودش یک کران پایین B

$$\left.\begin{array}{l} \text{اولاً: } \forall b\in B;\ \underbrace{\inf B}_{} \le b \\ \text{ثانیاً: } \forall a\in A \xrightarrow{\text{چون } A\subseteq B} a\in B \end{array}\right\} \Rightarrow \forall a\in A;\ \inf B \le a \longrightarrow \text{یک کران پایین } A \text{ است } \underbrace{\inf B}_{\text{عددی ثابت}} \longrightarrow \inf B \le \inf A. \checkmark$$

طبق تعریف $\inf$

* قضیه (ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی): اگر a و b اعداد حقیقی و مثبت باشند آنگاه عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $na>b$.

اثبات: صفحهٔ ۱۳ کتاب راسل گوردون. ▨

نتیجه: فرض کنید x عددی حقیقی و مثبت باشد. آنگاه:

(الف) $\exists n\in\mathbb{N};\ 0<\frac{1}{n}<x$. برهان: با انتخاب $\begin{cases} a=x \\ b=1 \end{cases}$ در قضیه ارشمیدسی بالا، حکم بدست می‌آید.

(ب) $\exists m\in\mathbb{N};\ m-1 \le x < m$. برهان: با انتخاب $\begin{cases} a=1 \\ b=x \end{cases}$ در قضیه ارشمیدسی،

$\exists n\in\mathbb{N};\ x<n$. پس $A=\{k\in\mathbb{N} \mid x<k\}$ ناتهی است. فرض کنید m کوچکترین عضو A باشد. پس:

$$\left.\begin{array}{l} \text{اولاً: } x<m \\ \text{ثانیاً: } m-1\notin A \longrightarrow x \not< m-1 \longrightarrow m-1\le x \end{array}\right\} \Rightarrow m-1 \le x < m. \checkmark$$

* در قضیه زیر نشان می‌دهیم دو مجموعه اعداد گویا (یعنی $\mathbb{Q}$) و اعداد گنگ (یعنی $\mathbb{Q}^c$) در $\mathbb{R}$ چگال هستند. یعنی بین هر دو عدد حقیقی متمایز، عددی گویا و عددی گنگ وجود دارد. (توجه: فرض کنید $A\subset B$. می‌گوییم A در B چگال است هرگاه بین هر دو عدد متمایز در B، عددی از A وجود داشته باشد.)

* قضیه (قضیه چگالی): بین هر دو عدد حقیقی متمایز، عددی گویا و عددی گنگ وجود دارد.

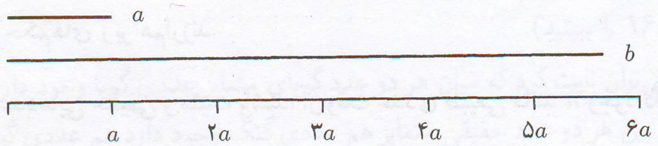
اثبات: صفحه ۳۳ کتاب راسل گوردون. ▨

نتیجه: بین هر دو عدد حقیقی متمایز، تعداد نامتناهی عدد گویا و تعداد نامتناهی عدد گنگ وجود دارد.

عددهای گویا متمایز می‌کند. اگر بخواهیم مطالب بخش ۱.۱ و این بخش را جمع‌بندی کنیم باید بگوییم که اساس این کتاب دربارهٔ آنالیز حقیقی این است که مجموعهٔ عددهای حقیقی هیأتی مرتب است که اصل موضوع کمال برای آن درست است.

اصل موضوع کمال مدعی وجود چیزی است ــ یعنی، سوپریمم مجموعه‌های ناتهی از عددهای حقیقی که از بالا کراندارند. این اصل مشخص نمی‌کند که چگونه این سوپریمم را پیدا کنیم، بلکه فقط می‌گوید چنین عددی وجود دارد. این اصل موضوع در پس اکثر حکم‌های وجودی مهم در آنالیز حقیقی، نظیر قضیهٔ مقدار میانی و قضیهٔ مقدار میانگین، نهفته است. یک بار دیگر تأکید می‌کنیم که اصل موضوع کمال وجود عددی حقیقی را تضمین می‌کند، هر چند که معلوم نباشد این عدد چیست یا چگونه می‌توان آن را پیدا کرد.

چند حکم بعدی برخی نتیجه‌های اصل موضوع کمال را بیان می‌کنند. جان کلام نتیجهٔ اول از نظر شهودی واضح است: اگر a و b عددهایی مثبت باشند، عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $na > b$. به زبان اندازه‌گیری، معنی این حرف این است که اگر دو تکه چوب با طول‌های نابرابر داشته باشیم، همواره می‌توان تعدادی کافی از نسخه‌های تکهٔ کوتاه‌تر را پشت به‌پشت هم چید تا طولی که بلندتر از طول تکهٔ دیگر است به‌دست آورد (شکل ۴.۱ را ببینید). به این نتیجه، به افتخار ارشمیدس سیراکوزی (دانشمند مشهور یونانی که در قرن سوم پیش از میلاد می‌زیسته)، می‌گویند ویژگی ارشمیدسی عددهای حقیقی.



شکل ۴.۱ شش نسخه از a از b بلندتر است

قضیهٔ ۱۶.۱ ویژگی ارشمیدسی عددهای حقیقی اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند، آن‌وقت عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $na > b$.

اثبات. اگر $a \geq b > 0$، درستی حکم معلوم است، بنابراین فرض کنید $0 < a < b$. اثبات به روش برهان خلف است. فرض کنید عددی طبیعی مانند n وجود نداشته باشد که $na > b$. در این صورت به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $na \leq b$، در نتیجه مجموعهٔ $S = \{na : n \in \mathbb{Z}^+\}$ از بالا به b کراندار است. بنابر اصل کمال، مجموعهٔ S سوپریممی مانند β دارد. اکنون توجه کنید که $\beta - a < \beta$، زیرا $a > 0$ و، بنابر تعریف سوپریمم، عدد $\beta - a$ کرانی بالایی برای S نیست. در

نتیجه، عددی طبیعی مانند p وجود دارد که $pa > \beta - a$. به این ترتیب،

$$\beta < pa + a = (p + ۱)a$$

چون $(p+۱)a \in S$، این نابرابری با اینکه β کرانی بالایی برای S است تناقض دارد. بنابراین عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $na > b$. ■

قضیهٔ بعد مدعی است که چهار حکم هم‌ارز یکدیگرند. یعنی اینکه اگر یکی از این حکم‌ها را درست فرض کنیم، آن‌وقت سه حکم دیگر هم درست‌اند؛ این چهار حکم درحقیقت یک چیز را می‌گویند. چون حکم (۱) همان قضیهٔ ۱۶.۱ است، هر چهار حکم درست‌اند. در بقیهٔ این کتاب به هر یک از این حکم‌ها می‌گوییم ویژگی ارشمیدسی عددهای حقیقی.

دو نکته در مورد اثبات قضیهٔ زیر درک اثبات را ساده‌تر می‌کند. نکتهٔ اول در مورد نماد ریاضی $\Rightarrow$، برای نتیجه دادن، است. حکم $(۲) \Rightarrow (۱)$، که خوانده می‌شود «یک، دو را نتیجه می‌دهد»، یعنی اینکه «اگر (۱)، آنگاه (۲)»؛ جملهٔ اول فرض است و جملهٔ دوم حکم. نکتهٔ دوم در مورد ویژگی خوش‌ترتیبی عددهای طبیعی است. بنابراین ویژگی هر مجموعهٔ ناتهی از عددهای طبیعی شامل عضوی است که از بقیه کوچک‌تر است. یعنی، اگر A مجموعه‌ای ناتهی از عددهای طبیعی باشد، آن‌وقت nای در A وجود دارد که به‌ازای هر a در A، $n \leq a$. ویژگی خوش‌ترتیبی عددهای طبیعی هم‌ارز اصل استقرای ریاضی است.

قضیهٔ ۱۷.۱ حکم‌های زیر هم‌ارزند.

۱. اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند، آن‌وقت عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $na > b$.

۲. مجموعهٔ عددهای طبیعی از بالا کراندار نیست.

۳. به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، عددی صحیح مانند n وجود دارد که $n \leq x < n + ۱$.

۴. به‌ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند x، عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $\frac{۱}{n} < x$.

اثبات. برای اینکه قضیه‌ای به این شکل را ثابت کنیم، کافی است ثابت کنیم

$$(۱) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۴) \Rightarrow (۱)$$

ثابت می‌کنیم $(۳) \Rightarrow (۲)$ و $(۴) \Rightarrow (۱)$، و اثبات دو استلزام دیگر را می‌گذاریم برای تمرین.

فرض کنید شرط (۲) برقرار باشد. چون اگر $x \in (-۱, ۱)$ یا x عددی صحیح باشد (۳) درست است، فرض کنید x عددی صحیح نباشد و $۱ < x$. بنابر فرض، مجموعهٔ $S_x = \{p \in \mathbb{Z}^+ : p > x\}$

تهی است. بنابر ویژگی خوش‌ترتیبی عددهای طبیعی، مجموعهٔ S_x کوچک‌ترین عضوی مانند q دارد. چون $q - ۱ < x < q$، اگر $n = q - ۱$، آن‌وقت عدد صحیح n ویژگی مورد نظر را دارد. اکنون فرض کنید x عددی صحیح نباشد و $x < -۱$. چون $-x > ۱$، از قسمت نخست اثبات معلوم می‌شود که عددی صحیح مانند m وجود دارد که $m - ۱ < -x < m$. در نتیجه $-m < x < -m + ۱$. این مطلب نشان می‌دهد که $(۳) \Rightarrow (۲)$.

اکنون فرض کنید شرط (۴) برقرار باشد. مانند اثبات قضیهٔ قبل، فقط کافی است حالتی را درنظر بگیریم که $۰ < a < b$. چون $\frac{a}{b}$ عددی مثبت است، از شرط (۴) معلوم می‌شود که عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $\frac{۱}{n} < \frac{a}{b}$. این نابرابری معادل است با $na > b$. بنابراین $(۴) \Rightarrow (۱)$. ■

چهار حکمی که در قضیهٔ ۱۷.۱ آمده‌اند ویژگی‌هایی از عددهای حقیقی‌اند که برای کسی که درسی در جبر مقدماتی را گذرانده باشد تقریباً واضح‌اند. تنها نکتهٔ عجیب دربارهٔ این ویژگی‌ها این است که باید ثابت شوند. با این همه، اگر مجموعهٔ عددهای حقیقی را مجموعهٔ عددهای گویا به همراه عددهایی که به آن اضافه شده‌اند تا موضوع کمال حل و فصل شود درنظر بگیریم (در نتیجه نقص عددهای گویا برطرف می‌شود)، آن‌وقت ویژگی ارشمیدسی عددهای حقیقی نشان می‌دهد که این عددهای اضافه شده جاهای خالی پر نشده با عددهای گویا را پر می‌کنند نه اینکه در جایی قرار بگیرند که پس از همهٔ عددهای صحیح قرار دارد (حکم‌های (۲) و (۳) و نیز قضیهٔ ۱۸.۱ را ببینید). خیلی مهم است که توجه کنید که اصل موضوع کمال برای اثبات درستی هر یک از این چهار حکم لازم است (اثبات قضیهٔ ۱۶.۱ را ببینید).

به سادگی می‌توان ثابت کرد که میان هر دو عدد گویای متمایز عددی گویا وجود دارد. حکم بعدی نشان می‌دهد که بین هر دو عدد حقیقی متمایز هم عددی گنگ وجود دارد هم عددی گویا. این مطلب حکمی دیگر است که از اصل موضوع کمال نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۱۸.۱ میان هر دو عدد حقیقی متمایز عددی گویا و عددی گنگ وجود دارد.

اثبات. فرض کنید x و y عددهایی حقیقی و متمایز باشند و $x < y$. بنابر ویژگی ارشمیدسی عددهای حقیقی، عددی طبیعی مانند q وجود دارد که $q(y - x) > ۱$. چون $qy - qx > ۱$، عددی صحیح مانند p وجود دارد که $qx < p < qy$. (اثبات این حکم بماند برای تمرین). عدد $\frac{p}{q}$ گویاست و $x < \frac{p}{q} < y$. از استدلالی مشابه معلوم می‌شود که عددی گویا مانند r، $r \neq ۰$، وجود دارد که $\sqrt{۲}x < r < \sqrt{۲}y$. عدد $\frac{r}{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ میان x و y است. این موضوع اثبات را کامل می‌کند. ■

چون میان هر دو عدد حقیقی متمایز هم عددی گویا وجود دارد هم عددی گنگ، به نظر می‌رسد

ص ۲

فصل ۲ : دنباله ها

* تعریف دنباله: یک دنباله از اعداد حقیقی، تابعی است مانند $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(n)=x_n \end{cases}$ که دامنه‌اش، مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی $\mathbb{N}$، و بردش زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. معمولاً یک دنباله به شکل $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

مثال: دنباله‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) $\{x_n=n^3\}$ ⟵ حل) $\{1,8,27,64,\dots\}$

(ب) $\{x_n=\frac{n}{n+3}\}$ ⟵ حل) $\{\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{3}{6},\dots\}$

(ج) دنباله فیبوناچی: $x_1=1$ ، $x_2=1$ ، $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ⟵ $\{1,1,2,3,5,8,\dots\}$

* تعریف: اگر $X=\{x_n\}$ و $Y=\{y_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند آنگاه:

$$X+Y=\{x_n+y_n \mid n\in\mathbb{N}\},\quad X-Y=\{x_n-y_n \mid n\in\mathbb{N}\},\quad X\cdot Y=\{x_n\cdot y_n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

همچنین اگر $c\in\mathbb{R}$ آنگاه $cX=\{cx_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ، و اگر $Z=\{z_n\}$ و برای هر n ، $z_n\neq 0$ آنگاه $\frac{X}{Z}=\{\frac{x_n}{z_n} \mid n\in\mathbb{N}\}$.

* تعریف (همگرایی دنباله): دنباله $\{x_n\}$ به عدد l همگراست هرگاه

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N_0:\ |x_n-l|<\varepsilon.$$

در این صورت می‌نویسیم $x_n\to l$ و یا $\lim_{n\to\infty}x_n=l$.

هرگاه دنباله $\{x_n\}$ همگرا نباشد، می‌گوییم واگراست.

* قضیه: حد دنبالهٔ همگرا، یکتاست.

مرجع دوم

اثبات: ص ۷۲ کتاب اصل گودرزی. ■

مثال: ثابت کنید دنبالهٔ $\{\frac{7n}{4n+5}\}$ به عدد $\frac{7}{4}$ همگراست.

حل) ص ۷۵ کتاب اصل گودرزی.

تمرین: نشان دهید دنبالهٔ $\{\frac{3n+2}{n+1}\}$ به عدد ۳ همگراست.

* تعریف: دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی را کراندار می‌گوییم هرگاه عددی مانند $M>0$ وجود داشته باشد که

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ |x_n|\leq M.$$

* قضیه: هر دنبالهٔ همگرا، کراندار است.

اثبات: ص ۷۳ کتاب اصل گودرزی. ■

* نتیجه: طبق عکس نقیض قضیه قبل نتیجه می‌شود که اگر دنباله‌ای کراندار نباشد، آنگاه همگرا نیست.

قضیهٔ ۲.۴: حد دنبالهٔ همگرا یکتاست.

اثبات. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد و $\{x_n\}$ هم به a همگرا باشد هم به b. فرض کنید $\varepsilon > 0$. بنابر تعریف، عددی طبیعی مانند N_1 وجود دارد که به‌ازای هر n که $n \geq N_1$، $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. به طور مشابه، عددی طبیعی مانند N_2 وجود دارد که به‌ازای هر n که $n \geq N_2$، $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. در این صورت، به‌ازای $N = \max\{N_1, N_2\}$،

$$|a-b| = |a - x_N + x_N - b| \leq |a - x_N| + |x_N - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

چون عدد مثبت ε دلخواه بود، پس $a = b$ (قضیهٔ ۷.۱ را ببینید). بنابراین، دنبالهٔ $\{x_n\}$ حد یکتا دارد. ■

دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نیست به شرطی که عددی مانند L وجود نداشته باشد که $x_n \to L$. معنی اینکه دنبالهٔ $\{x_n\}$ به L همگرا نیست چیست؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، باید تعریف همگرایی را نقض کنیم. برای اینکه دنبالهٔ $\{x_n\}$ به L همگرا نباشد، باید دست‌کم یک عدد مثبت مانند ε وجود داشته باشد که نتوان عددی طبیعی مانند N پیدا کرد که به‌ازای هر n که $n \geq N$، $|x_n - L| < \varepsilon$. آنچه که می‌خواهیم این است که nای وجود داشته باشد که $n \geq N$ و $|x_n - L| \geq \varepsilon$. برای روشن شدن مطلب، دنبالهٔ

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ توانی از ۲ نبود} \\ 2 & \text{اگر } n \text{ توانی از ۲ بود} \end{cases}$$

را درنظر بگیرید. چند جملهٔ نخست این دنباله عبارت‌اند از

$$2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, \ldots$$

این دنباله به ۱ همگرا نیست، زیرا به‌ازای هر n، $|t_{2^n} - 1| = 1$. برای اینکه تعریف همگرا نبودن جور دربیاید، می‌توانیم فرض کنیم $\varepsilon = 1$ و $n = 2^N > N$. از استدلالی مشابه معلوم می‌شود که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند L، $\{t_n\}$ به L همگرا نیست. در نتیجه $\{t_n\}$ همگرا نیست. بعداً در این فصل روش‌های کارآمدتری را برای اثبات همگرا نبودن دنباله‌ها معرفی می‌کنیم.

خوب است توجه کنید که تعریف همگرایی دنباله‌ها چندین صورت هم‌ارز دارد. مثلاً نابرابری $|x_n - L| < \varepsilon$ را می‌توان با $|x_n - L| \leq \varepsilon$ یا $|x_n - L| < c\varepsilon$، که در اینجا c عددی مثبت و ثابت است، جایگزین کرد. نابرابری $n \geq N$ را می‌توان با $n > N$ جایگزین کرد. لازم نیست که N عددی طبیعی باشد، اما همواره فرض می‌کنیم که چنین است. آخر سر، کافی است فقط حالتی را درنظر بگیریم که $0 < \varepsilon < 1$ یا حالتی که در این نابرابری به جای ۱ عدد مثبت و کوچک دیگری را گذاشته‌ایم. گاهی این تعریف‌های جایگزین اثبات یا نمادگذاری اثبات را کمی ساده‌تر می‌کنند. اثبات اینکه این تعریف‌ها هم‌ارزند بماند برای خواننده.

معنی واقعی این تعریف چیست؟ تعبیری خودمانی از همگرایی چیزی شبیه به این است: اگر در دنباله‌ای جلو و جلوتر بروید، جمله‌ها به L نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. عیب این تعبیر این است که کلمه‌های «جلوتر» و «نزدیک‌تر» نسبتاً غیردقیق‌اند. تعریف ریاضی، این اندازه‌ها را دقیقاً مشخص می‌کند. اگر خطای مجاز ε، $\varepsilon > 0$، مشخص شده باشد، باید بتوان عددی طبیعی مانند N_0 طوری پیدا کرد که بعد از جملهٔ N_0ام فاصلهٔ هر جملهٔ دنباله تا L از ε کمتر باشد. یعنی اینکه مجموعهٔ $\{x_n : n \geq N_0\}$ درون بازهٔ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ قرار می‌گیرد. با نمادگذاری تعریف بالا، عدد مثبت ε مشخص می‌کند که جمله‌های دنباله چقدر به L نزدیک‌اند و عدد طبیعی N_0 مشخص می‌کند که چقدر باید روی دنباله جلو بروید تا مطمئن باشید فاصلهٔ جمله‌ها تا L از ε کمتر است. نکتهٔ مهم این است که ε هر عدد مثبتی می‌تواند باشد. عدد مثبت ε هر چه که باشد، همواره می‌توان عددی طبیعی مانند N_0 با شرط داده شده پیدا کرد. گاهی بهتر است که (هر چند ما این کار را نمی‌کنیم) N_0 را به شکل $N_0(\varepsilon)$ بنویسیم، زیرا معمولاً انتخاب N_0 به ε بستگی دارد. به‌طور شهودی، هر چه ε کوچک‌تر می‌شود، N_0 بزرگ‌تر می‌شود. خوب است خاطر نشان کنیم که ابتدا عدد مثبت ε را می‌دهند، بعد به دنبال N_0 مناسب می‌گردیم. نگاهی روی محور به دنباله‌ای همگرا در شکل ۱.۲ آمده است.

به عنوان مثالی از دنباله‌ای همگرا، ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ $\left\{\frac{7n}{4n+5}\right\}$ به $\frac{7}{4}$ همگراست. راه‌حل این مسئله با نامعادلهٔ

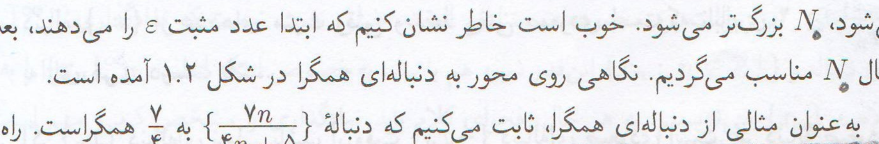
$$\left|\frac{7n}{4n+5}-\frac{7}{4}\right| < \varepsilon$$

شروع می‌شود. به یاد داشته باشید که ابتدا عدد مثبت ε داده می‌شود، سپس N_0 باید طوری انتخاب شود که نابرابری بالا به‌ازای هر n که $n \geq N_0$ درست باشد. به‌ازای هر n که $n \geq N_0$، با کمی محاسبه معلوم می‌شود که

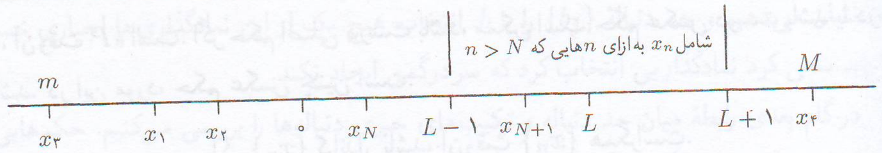
$$\left|\frac{7n}{4n+5}-\frac{7}{4}\right| = \frac{35}{4(4n+5)} < \frac{35}{4(4n)} < \frac{3}{n} \leq \frac{3}{N_0}. < \varepsilon$$

البته کافی است

بنابراین کافی است عدد طبیعی N_0 را طوری انتخاب کنیم که $\varepsilon > \frac{3}{N_0}$. وجود چنین عدد طبیعی‌ای از



شکل ۱.۲ دنبالهٔ $\{x_n\}$ به L همگراست.



شکل ۲.۲ هر دنبالهٔ همگرا از بالا و پایین کراندار است.

قضیهٔ بعد می‌گوید که دنبالهٔ همگرا کراندار است. شهود نهفته در اثبات این قضیه این است جمله‌های دنبالهٔ همگرا در نزدیکی حد این دنباله «تلنبار می‌شوند» (شکل ۲.۲ را ببینید). به این ترتیب تعدادی متناهی جملهٔ پراکنده می‌مانند که در محاسبهٔ کران باید لحاظ شوند، و هر مجموعهٔ متناهی کراندار است. انتخاب عدد ۱ در این اثبات اختیاری است؛ هر عدد مثبت دیگر را هم می‌توان انتخاب کرد.

قضیهٔ ۵.۲ هر دنبالهٔ همگرا کراندار است.

اثبات. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد و L حد این دنباله. متناظر با $\varepsilon = 1$، عددی طبیعی مانند N وجود دارد که به‌ازای هر n که $n > N$، $|x_n - L| < 1$. اگر

?

$\forall n > N:$ $|x_n| \leq |L|+1$:پس

$$M = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |L| + 1\right\}$$

آن‌وقت عدد M کرانی برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ است. برای اثبات این مطلب، ابتدا توجه کنید که به‌سادگی از تعریف M نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n که $n \leq N$، $|x_n| \leq M$. اگر $n > N$، با استفاده از نابرابری مثلث به‌دست می‌آید

$-L+L$

$$|x_n| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L| \leq M$$

نامساوی مثلث

در نتیجه، به‌ازای هر n، $|x_n| \leq M$. به این ترتیب، دنبالهٔ $\{x_n\}$ کراندار است. ■

این قضیه در شکل سنتی «اگر، آن‌وقت» می‌شود:

اگر $\{x_n\}$ همگرا باشد، آن‌وقت $\{x_n\}$ کراندار است.

عکس نقیض حکم «اگر P، آن‌وقت Q» حکم «اگر Q نباشد، آن‌وقت P نیست» است. وقتی که حکم اصلی درست باشد، حکم عکس نقیض هم درست است. بنابراین حکم زیر درست است:

اگر $\{x_n\}$ کراندار نباشد، آن‌وقت $\{x_n\}$ همگرا نیست.

مثلاً دنبالهٔ $\{2^n\}$ همگرا نیست، چون کراندار نیست. **عکس** حکم «اگر P، آن‌وقت Q» حکم «اگر

* قضیه: فرض کنید $\{a_n\}$ به a و $\{b_n\}$ به b همگرا باشند، در این صورت:

الف) دنباله $\{a_n+b_n\}$ به $a+b$ همگراست.

ب) دنباله $\{a_n-b_n\}$ به $a-b$ همگراست.

ج) دنباله $\{ca_n\}$ به ca همگراست که c عددی دلخواه و ثابت است.

د) دنباله $\{a_nb_n\}$ به ab همگراست.

هـ) اگر برای هر n، $b_n\neq 0$ و $b\neq 0$، آنگاه دنباله $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ به $\frac{a}{b}$ همگراست.

اثبات: ص ۷۵ کتاب اصلی آوردون. $\blacksquare$

* قضیه (فشردگی یا فشار برای دنباله‌ها): فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌های همگرا باشند و $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد که برای هر n، $a_n\le x_n\le b_n$. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو به عدد l همگرا باشند آنگاه دنباله $\{x_n\}$ نیز به l همگراست.

اثبات: ص ۷۶ کتاب آوردون. $\blacksquare$

مثال: به مثالهای زیر توجه کنید:

① $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=?$

حل) ادعا: $\forall n\in\mathbb{N};\ n<2^n$? (با استقرا) زیرا:

$n=1:\ 1<2^1$ ✓

فرض استقرا: $n=k:\ k<2^k$

حکم استقرا: $n=k+1:\ k+1<2^{k+1}$

اثبات حکم استقرا: برای عدد طبیعی k داریم:

$$\underbrace{k+1<2^k+1}_{\text{از فرض استقرا}}<\underbrace{2^k+2^k}_{\text{بدیهی است}}=2(2^k)=2^{k+1}.\ ✓$$

نتیجه: چون $n<2^n$ (از ادعا)

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(0)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xRightarrow{\text{از قضیه فشار}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

هر دو به $l=0$ همگرا هستند.

تمرین ② $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^n}\overset{?}{=}0$

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید $\forall n\in\mathbb{N}:\ n^2<10^n$

③ اگر $0<b<1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}b^n=0$

حل) چون $0<b<1\longrightarrow\frac{1}{b}>1\Rightarrow\frac{1}{b}-1>0$

اکنون تعریف می‌کنیم $a=\frac{1}{b}-1$، پس $a>0$، $b=\frac{1}{1+a}$. بنابراین

$$0<b^n=\frac{1}{(1+a)^n}\le\frac{1}{1+na}<\frac{1}{na}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(0)\le\lim_{n\to\infty}b^n\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}b^n=0.\ ✓$$

از نامساوی برنولی (در تمرین‌ها که با استقرا ثابت کنید)

با a نشان می‌دهیم و حد دنبالهٔ $\{b_j\}$ را با b. انتخاب هیچ یک از این نمادگذاری‌ها اجباری نیست، اما باید سعی کرد نمادگذاریی انتخاب کرد که سردرگمی ایجاد نکند.

در گام بعدی رابطهٔ میان حد دنباله و ترکیب‌های جبری دنباله‌ها را بررسی می‌کنیم. حکم‌هایی که در قضیهٔ بعد آورده‌ایم شگفت‌انگیز نیستند، اما اگر این درس برخورد اول‌تان با استدلال‌های $N-\varepsilon$ای است، باید تلاش بیشتری کنید تا اثبات‌ها را بفهمید. پرداختن به جزئیات اثبات‌ها، هم برای اینکه مهارت‌های نوشتن اثبات‌تان بالا برود هم برای درک تعریف همگرایی دنباله‌ها، تمرین خوبی است. چون بهترین نتیجه وقتی حاصل می‌شود که اثبات را واقعاً خودتان بنویسید، همهٔ اثبات‌ها بجز اثبات حکم مربوط به حاصل‌ضرب دو دنباله به‌عنوان تمرین واگذار شده‌اند. این حکم، به‌طور خودمانی، می‌گوید که وقتی a_n نزدیک a است و b_n نزدیک b، a_nb_n نزدیک ab است. برای اثبات این حکم، لازم است که a_nb_n-ab را برحسب a_n-a و b_n-b بنویسیم. این رابطه را می‌توان در آخرین تساوی ظاهر شده در اثبات قضیهٔ بعد پیدا کرد. (رابطه‌ای دیگر میان این جمله‌ها را در تمرین‌ها بررسی کرده‌ایم.) شاید بهتر باشد که از این تساوی شروع کنید و ببینید که قطعه‌های اثبات چطور کنار هم قرار می‌گیرند تا اینکه مقدار $|a_nb_n-ab|$ از ε کمتر شود.

قضیهٔ ۷.۲ فرض کنید $\{a_n\}$ به a همگرا باشد و $\{b_n\}$ به b. در این صورت

الف) دنبالهٔ $\{ca_n\}$ به ca همگراست، که در اینجا c عددی دلخواه و ثابت است.

ب) دنبالهٔ $\{a_n+b_n\}$ به $a+b$ همگراست.

ج) دنبالهٔ $\{a_n-b_n\}$ به $a-b$ همگراست.

د) دنبالهٔ $\{a_nb_n\}$ به ab همگراست.

ه) اگر به‌ازای هر n، $b_n\neq 0$ و $b\neq 0$، دنبالهٔ $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ به $\dfrac{a}{b}$ همگراست.

اثبات. قسمت (د) را ثابت می‌کنیم و بقیهٔ قسمت‌ها را می‌گذاریم برای تمرین. بنابر قضیهٔ ۵.۲ دنبالهٔ $\{a_n\}$ کراندار است. فرض کنید عدد M، $M>1$، کرانی برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ باشد و ε عددی مثبت. بنابر تعریف، عددهایی طبیعی مانند N_1 و N_2 وجود دارند که به‌ازای هر n که $n\geq N_1$

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$$

و به‌ازای هر n که $n\geq N_2$،

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

(در مخرج به جای $|b|$ از $|b|+۱$ استفاده کرده‌ایم تا حالتی را که $b=۰$ هم درنظر گرفته باشیم.)
به‌ازای هر n که $n \geq N$،

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &\leq |a_nb_n - a_nb| + |a_nb - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &< M\frac{\varepsilon}{۲M} + |b|\frac{\varepsilon}{۲(۱+|b|)} < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.\end{aligned}$$

بنابراین، دنبالهٔ $\{a_nb_n\}$ به ab همگراست. ■

دو قضیهٔ بعد نابرابری‌ها و دنباله‌ها را به هم مربوط می‌کنند. اگر جمله‌های دنباله‌ها را نقطه‌هایی روی محور درنظر بگیریم، درستی این دو حکم خیلی زود روشن می‌شود، اما در اثبات آنها فقط باید از تعریف همگرایی دنباله‌ها و ویژگی‌های نابرابری‌ها استفاده کنیم. به دلایلی که معلوم خواهد شد، معمولاً قضیهٔ نخست را قضیهٔ فشردگی برای دنباله‌ها می‌نامند.

قضیهٔ ۸.۲ قضیهٔ فشردگی برای دنباله‌ها فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی همگرا باشند و $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد که به‌ازای هر n، $a_n \leq x_n \leq b_n$. اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو به L همگرا باشند، آن‌وقت دنبالهٔ $\{x_n\}$ به L همگراست.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. بنابر تعریف همگرایی دنباله‌ها، عددی طبیعی مانند N وجود دارد که به‌ازای هر n که $n \geq N$،

$$|a_n - L| < \varepsilon, \qquad |b_n - L| < \varepsilon$$

به‌ازای هر n که $n \geq N$،

$$L - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < L + \varepsilon$$

که معادل است با $|x_n - L| < \varepsilon$. این موضوع نشان می‌دهد که $\{x_n\}$ به L همگراست. ■

به‌عنوان نمونه‌ای از کاربردهای این قضیه، دنبالهٔ $\left\{\frac{n}{۱۰^n}\right\}$ را درنظر بگیرید. چون به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n^۲ < ۱۰^n$ (می‌توان این حکم را به استقرا ثابت کرد)، پس به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$۰ < \frac{n}{۱۰^n} < \frac{n}{n^۲} = \frac{۱}{n}$$

چون دنبالهٔ $\{۰\}$ (دنباله‌ای ثابت) و $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ هر دو به ۰ همگرا هستند، از قضیهٔ فشردگی نتیجه می‌شود که دنبالهٔ $\left\{\frac{n}{۱۰^n}\right\}$ به ۰ همگراست.

تمرین ۴) اگر $c>0$: $\lim\limits_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}}=1$ $\quad c^{\frac{1}{n}} \to \sqrt[n]{c}$

تذکر: حل این تمرین در ص ۸۶ کتاب بارتل (مرجع اول) آمده است.

۵) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=1 \quad n^{1/n}\to\sqrt[n]{n}$

حل) برای $n>1$: $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n]{1} \longrightarrow n^{\frac1n}>1 \Longrightarrow$ برای $n>1$: $\exists k_n>0 : \underbrace{n^{\frac1n}=1+k_n}_{(*)}$

$\Rightarrow n=(1+k_n)^n \Longrightarrow n=1+nk_n+\frac{n(n-1)}{2}k_n^2+\dots+k_n^n \ge 1+\frac{n(n-1)}{2}k_n^2$

$(a+b)^n$ با استفاده از بسط دوجمله‌ای

$\Rightarrow n\ge 1+\frac{n(n-1)}{2}k_n^2 \Longrightarrow n-1\ge \frac{n(n-1)}{2}k_n^2 \Longrightarrow 1\ge\frac{n}{2}k_n^2$

$\Rightarrow$ برای $n>1$: $k_n^2\le\frac{2}{n} \Longrightarrow 0<k_n\le\sqrt{\frac{2}{n}} \xRightarrow{\text{از قضیه فشار}} \lim\limits_{n\to\infty}k_n=0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac1n}=1$ (از $(*)$)

هر دو همگرا به صفر

۶) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=?$

از فرمول بسط دوجمله‌ای $\longrightarrow (a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ و $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

حل) برای $n\ge4$: $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\dots+1$

$> \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$

$\Longrightarrow 0<\frac{n^3}{2^n}<n^3\left(\frac{4!}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\right) \xRightarrow{\text{از قضیه فشار}} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$

همگرا به صفر — وقتی $n\to\infty$ همگرا به صفر

* لم: اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که به x همگراست و برای هر n ، $x_n\ge0$ ، آنگاه $x\ge0$.

اثبات:

چون $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x \Longrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}; \forall n\ge N_0 : |x_n-x|<\varepsilon \Longrightarrow \forall n\ge N_0 : -\varepsilon<x_n-x<\varepsilon$

پس برای $n=N_0$ نیز داریم $-\varepsilon<x_{N_0}-x<\varepsilon$

پس $x_{N_0}-x<\varepsilon$. بنابراین $x>x_{N_0}-\varepsilon\ge-\varepsilon$.

چون طبق فرض، $x_{N_0}\ge0$

پس نتیجه گرفتیم که

$\forall\varepsilon>0 : x>-\varepsilon$

این یعنی: $x>$ هر عدد منفی (چون $\varepsilon>0$ دلخواه بود پس $-\varepsilon<0$ دلخواه است یعنی $-\varepsilon$ می‌تواند هر عدد منفی دلخواه باشد)

پس x از هر عدد منفی بزرگتر است و این یعنی $x\ge0$. ✓

چون $a > 0$، پس $0 < na < 1 + na$. در نتیجه $0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$، و از این بطور بدیهی نتیجه می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|\frac{1}{1+na} - 0| \leqslant (\frac{1}{a})\frac{1}{n}$. چون $\lim(\frac{1}{n}) = 0$، می‌توان به کمک قضیهٔ ۱۰.۱.۳ با شرط $C = \frac{1}{a}$ و $m = 1$ نتیجه گرفت که $\lim(\frac{1}{1+na}) = 0$.

(ب) $\lim(\frac{1}{2^n}) = 0$.

چون به‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}$، $0 < n < 2^n$ (ر.ک. تمرین ۸.۳.۱)، داریم $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$، از این نتیجه می‌شود که به‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}$، $|\frac{1}{2^n} - 0| \leqslant \frac{1}{n}$. می‌دانیم $\lim(\frac{1}{n}) = 0$، به کمک قضیهٔ ۱۰.۱.۳ نتیجه می‌گیریم که $\lim(\frac{1}{2^n}) = 0$.

(ج) اگر $0 < b < 1$، آنگاه $\lim(b^n) = 0$.

چون $0 < b < 1$، با تعریف $a := \frac{1}{b} - 1$، $a > 0$ و می‌توان نوشت $b = \frac{1}{1+a}$. بنا به نامساوی برنویی ۱۴.۲.۲ (ج) داریم $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. بنابراین

$$0 < b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leqslant \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$$

پس از قضیهٔ ۱۰.۱.۳، $\lim(b^n) = 0$ را بدست می‌آوریم.

(د) اگر $c > 0$، آنگاه $\lim(c^{1/n}) = 1$.

حالت $c = 1$ واضح است زیرا در این صورت $(c^{1/n})$ دنبالهٔ ثابت $(1, 1, 1, \ldots)$ است که بطور بدیهی به 1 همگرا است.

اگر $c > 1$، آنگاه برای عددی مانند $d_n > 0$، $c^{1/n} = 1 + d_n$. پس بنا به نامساوی برنویی ۱۴.۲.۲ (ج) برای $n \in \mathbb{N}$، $c = (1 + d_n)^n \geqslant 1 + nd_n$. بنابراین داریم $c - 1 \geqslant nd_n$، پس $d_n \leqslant \frac{c-1}{n}$. در نتیجه برای $n \in \mathbb{N}$،

$$|c^{\frac{1}{n}} - 1| = d_n \leqslant (c-1)\frac{1}{n}.$$

پس به کمک قضیهٔ ۱۰.۱.۳ نتیجه می‌گیریم که برای $c > 1$، $\lim(c^{\frac{1}{n}}) = 1$.

اکنون فرض می‌کنیم $0 < c < 1$؛ در این صورت برای عددی مانند $h_n > 0$، $c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+h_n}$. در نتیجه بنا به نامساوی برنویی،

$$c = \frac{1}{(1+h_n)^n} \leqslant \frac{1}{1+nh_n} < \frac{1}{nh_n},$$

و از این نتیجه می‌شود که برای $n \in \mathbb{N}$، $0 < h_n < \frac{1}{nc}$. بنابراین داریم

$$0 < 1 - c^{\frac{1}{n}} = \frac{h_n}{1+h_n} < h_n < \frac{1}{nc}$$

جلسه ۵

*قضیه: فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ به x همگرا باشد و برای هر n، $a \le x_n \le b$. آنگاه $a \le x \le b$.

اثبات:

ادامه: چون $\forall n: a \le x_n \le b \Rightarrow$ دنباله‌ی $\{b-x_n\}$ نامنفی است و $\{b-x_n\}$ به عدد $b-x$ همگراست $\xRightarrow{\text{از لم قبل}} b-x \ge 0 \Rightarrow x \le b$ ①

دنباله‌ی نامنفی است

دنباله‌ی $\{x_n-a\}$ نامنفی است و $\{x_n-a\}$ به عدد $x-a$ همگراست $\xRightarrow{\text{از لم قبل}} x-a \ge 0 \Rightarrow a \le x$ ②

پس از ① و ②: $a \le x \le b$ ✓. $\boxed{}$

*قضیه (تمرین): فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ موجود باشد.

اگر $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ آنگاه دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

مثال: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = ?$

حل) دنباله‌ی $x_n = \frac{n}{2^n}$ را در نظر بگیرید. اولاً: x_n ها مثبت اند.

ثانیاً:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{n\,2^{n+1}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

پس طبق قضیه قبل، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

تمرین: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+7)^3}{4^n} = ?$

الف ۶

* دنباله‌های یکنوا :

* تعریف (دنباله صعودی، نزولی و یکنوا) : فرض کنید $X=\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. می‌گوییم دنباله $\{x_n\}$ صعودی است هرگاه در نامساوی‌های

$$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le x_{n+1} \le \dots$$

صدق کند. می‌گوییم دنباله $\{x_n\}$ نزولی است اگر در نامساوی‌های

$$x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \dots$$

صدق کند. همچنین می‌گوییم دنباله $\{x_n\}$ یکنوا است اگر صعودی یا نزولی باشد.

مثال:

① $\{1,2,2,3,3,3,\dots\} \longrightarrow$ صعودی

② $\{1,2,3,4,\dots,n,\dots\} \longrightarrow$ صعودی

③ اگر $a>1$: $\{a,a^2,a^3,\dots\} \longrightarrow$ صعودی

مثال:

① $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\dots,\frac{1}{2^{n-1}},\dots\} \longrightarrow$ نزولی

② $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\} \longrightarrow$ نزولی

③ اگر $0<b<1$: $\{b,b^2,b^3,\dots,b^n,\dots\} \longrightarrow$ نزولی

مثال: دنباله‌های زیر یکنوا نیستند:

① $\{1,-1,1,-1,\dots,(-1)^{n+1},\dots\}$

② $\{-1,2,-3,4,\dots,(-1)^n n,\dots\}$

③ $\{7,6,2,1,2,3,4,\dots\}$

④ $\{-2,0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\}$

* قضیه (قضیه همگرایی یکنوا) : فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله یکنوا از اعداد حقیقی باشد. در این صورت:

دنباله $\{x_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر کراندار باشد.

(لازم به ذکر است وقتی $\{x_n\}$ صعودی و کراندار باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\sup\{x_n\}$ و اگر $\{x_n\}$ نزولی و کراندار باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\inf\{x_n\}$)

اثبات: صفحه ۸۳ کتاب راسل گوردون. ■

مثال: همگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$:

حل) اولاً: دنباله $\{x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ نزولی است زیرا

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ n\le n+1 \longrightarrow \sqrt{n}\le\sqrt{n+1} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow x_{n+1}\le x_n$$

ثانیاً: به وضوح برای هر n، $0<x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\le 1$. پس این دنباله کراندار نیز است. پس طبق قضیه همگرایی یکنوا، دنباله $\{x_n\}$ همگرا و $\lim x_n=\inf\{x_n\}=0$.

لازم است ابتدا مقدار دقیق حد این دنباله را بدانیم. البته، موارد متعددی پیش می‌آید که پیدا کردن مقدار دقیق حد مورد نظر دشوار یا غیرممکن است. علاوه بر این، به‌ویژه در مباحث نظری آنالیز، گاهی دانستن همگرایی دنباله از پیدا کردن حد واقعی دنباله مهم‌تر است. در این بخش، دو روش برای اثبات همگرایی دنباله‌های از عددهای حقیقی را بی‌آنکه مقدار حدشان را بدانیم بررسی می‌کنیم.

دنباله‌ای صعودی مانند $\{x_n\}$ درنظر بگیرید و جمله‌های دنباله را نقطه‌های روی محور به حساب آورید. با بزرگ شدن n، x_nها به سمت راست حرکت می‌کنند و فقط دو حالت ممکن است پیش بیاید؛ یا نقطه‌ها بی‌حد و حصر به سمت راست جلو می‌روند (مانند وضعیت دنبالهٔ $\{n\}$) یا جلوی مقداری نگه دارنده تلنبار می‌شوند (مانند وضعیت دنبالهٔ $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}$). این ملاحظات منجر به قضیهٔ زیر می‌شوند.

قضیهٔ ۱۰.۲ دنبالهٔ یکنوا وقتی و فقط وقتی همگراست که کراندار باشد. یعنی: اگر دنباله $\{x_n\}$ صعودی باشد آنگاه: $\{x_n\}$ کراندار است $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ همگراست

اثبات مستقیم:

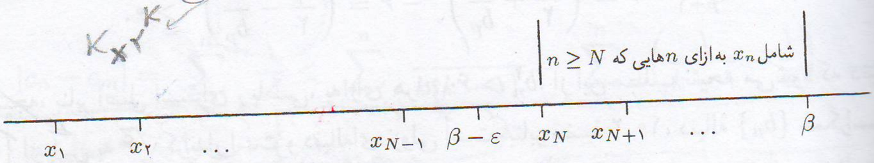
اثبات. چون هر دنبالهٔ همگرا کراندار است (قضیهٔ ۵.۲ را ببینید)، می‌ماند اینکه ثابت کنیم هر دنبالهٔ یکنوای کراندار همگراست. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای صعودی باشد که کراندار است. چون دنبالهٔ $\{x_n\}$ کراندار است، از اصل موضوع کمال نتیجه می‌شود که $\sup\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ وجود دارد. فرض کنید $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. چون $\beta - \varepsilon$ کرانی بالایی برای مجموعهٔ $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ نیست، عددی طبیعی مانند N وجود دارد که $x_N > \beta - \varepsilon$. اکنون از اینکه $\{x_n\}$ صعودی است نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n که $n \geq N$،

$$\beta - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \beta < \beta + \varepsilon$$

(شکل ۳.۲ را ببینید). بنابراین، به‌ازای هر n که $n \geq N$، $|x_n - \beta| < \varepsilon$. به این ترتیب، دنبالهٔ $\{x_n\}$ به β همگراست. اثبات اینکه دنباله‌های نزولی کراندار همگرا هستند بماند برای تمرین. به این ترتیب اثبات کامل شده است. ■

برای اینکه روشن کنیم چگونه می‌توان از این قضیه برای اثبات همگرایی دنباله‌ها استفاده کرد دنبالهٔ $\{a_n\}$ را درنظر بگیرید، که در اینجا به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k۲^k}$. شش

$K \times ۲^K$



شکل ۳.۲ هر دنبالهٔ صعودی کراندار همگراست.

ب) $\left\{x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\right\}$:

حل) اگر دنباله به صورت $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}=\frac{1}{1\times2^1}+\frac{1}{2\times2^2}+\frac{1}{3\times2^3}+\cdots+\frac{1}{n\times2^n}$ است. یعنی به صورت "

$x_1=\frac{1}{1\times2^1}$, $x_2=\frac{1}{1\times2^1}+\frac{1}{2\times2^2}$ و $x_3=\frac{1}{1\times2^1}+\frac{1}{2\times2^2}+\frac{1}{3\times2^3}$ و ...

است. به وضوح $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{n\times2^n}$. پس $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n\times2^n}\geq 0$

$\Rightarrow x_{n+1}-x_n\geq 0 \Rightarrow x_{n+1}\geq x_n \Rightarrow$ دنباله $\{x_n\}$ صعودی است.

ثانیاً:

$$\forall n: \; 0\leq x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$\Rightarrow \forall n: \; 0\leq x_n<1 \Rightarrow$ دنباله $\{x_n\}$ کراندار است.

از اولاً و ثانیاً: $\{x_n\}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار است، پس طبق قضیه همگرایی یکنوا، این دنباله همگرا است.

ج) دنباله $\{b_n\}$ به صورت زیر:

$b_1=3$, و $b_{n+1}=\frac{b_n}{2}+\frac{3}{b_n}$, $n\geq1$

حل) مثال ص ۸۴ کتاب رامسل و وردون.

د) دنباله $Y=\{y_n\}$ به صورت زیر:

$y_1=1$ و $y_{n+1}=\frac{1}{4}(2y_n+3)$, $n\geq1$

نشان دهید $\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{3}{2}$ ← حل) در صفحه ۱۰۰ مثال قسمت (ج) کتاب بارتل.

و) دنباله $Z=\{z_n\}$ به صورت زیر:

$z_1=1$, $z_{n+1}=\sqrt{2z_n}$, $n\geq1$

نشان دهید $\lim_{n\to\infty}z_n=2$ ← حل) در صفحه ۱۰۱ مثال قسمت (د) کتاب بارتل.

هـ) عدد اویلر: دنباله $\left\{e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این دنباله همگرا است. ← حل) مثال ص ۱۰۲ کتاب بارتل

(حد دنباله $\{e_n\}$ را عدد اویلر می‌نامند و آنرا با e نمایش می‌دهند، یعنی $e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

جملهٔ نخست این دنباله

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \ldots$$

هستند. چون a_{n+1} از جمع کردن عددی مثبت با a_n به‌دست می‌آید، معلوم است که این دنباله صعودی است. به‌علاوه، همهٔ جمله‌ها مثبت‌اند و به‌ازای هر n،

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

(در تساوی دوم از دستور مربوط به مجموع‌های هندسی، قضیهٔ ۱۰.۱ را ببینید، استفاده کرده‌ایم.) بنابراین، دنبالهٔ $\{a_n\}$ کراندار، به ۱، است. چون $\{a_n\}$ کراندار و صعودی است، بنابر قضیهٔ ۱۰.۲ همگراست.

به‌عنوان مثال دوم، دنبالهٔ $\{b_n\}$ را درنظر بگیرید که به‌طور بازگشتی این طور تعریف شده است: $b_1 = 3$ و به‌ازای هر n، $n \ge 1$،

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{b_n}$$

چهار جملهٔ نخست این دنباله ۳، ۲٫۵، ۲٫۴۵ و ۲٫۴۴۹۵ هستند. از تساویی که جمله‌های این دنباله را به‌طور بازگشتی تعریف می‌کند معلوم است که همهٔ جمله‌های این دنباله مثبت‌اند. با توجه به چند جملهٔ نخست، به‌نظر می‌رسد که این دنباله نزولی اکید است. برای اثبات این موضوع، باید ثابت کنیم که به‌ازای هر n، $b_{n+1} - b_n < 0$. چون

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{b_n} - b_n = \frac{6 - b_n^2}{2b_n}.$$

نابرابری موردنظر معادل است با اینکه به‌ازای هر n، $b_n^2 > 6$. این حکم را می‌توان به استقرای ریاضی ثابت کرد. معلوم است که $b_1^2 > 6$. اکنون فرض کنید که به‌ازای عددی طبیعی مانند p، $b_p^2 > 6$ و توجه کنید که

$$b_{p+1}^2 - 6 = \left(\frac{b_p}{2} + \frac{3}{b_p}\right)^2 - 6 = \left(\frac{b_p}{2} - \frac{3}{b_p}\right)^2 > 0.$$

در نتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، به‌ازای هر n، $b_n^2 > 6$. از این مطلب نتیجه می‌شود که دنبالهٔ $\{b_n\}$ از پایین به $\sqrt{6}$ کراندار است و دنباله‌ای نزولی است. بنابر قضیهٔ ۱۰.۲، دنبالهٔ $\{b_n\}$ همگراست.

با اینکه ثابت کرده‌ایم دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا هستند، اما حد هیچ یک از این دنباله‌ها را پیدا نکرده‌ایم. همواره می‌توان حد دنبالهٔ همگرای $\{x_n\}$ را با محاسبهٔ x_N، به‌ازای مقدار بزرگی از N،

یا محاسبهٔ چند جملهٔ دنباله و جستجوی الگویی در بسط اعشاری آنها تخمین زد. چون حد مورد نظر معلوم نیست، بررسی دقت این تخمین‌ها دشوار است. روش‌های متعددی برای مشخص کردن میزان دقت تقریب‌ها در شاخه‌ای از ریاضیات به نام آنالیز عددی بررسی می‌شود، اما در اینجا از این روش‌ها بحث نمی‌کنیم. با این همه، روش‌هایی برای مشخص کردن مقدار دقیق حد دنباله‌ها وجود دارد. مثلاً، حد دنبالهٔ $\{b_n\}$ در بالا را پیدا می‌کنیم. فرض کنید L حد $\{b_n\}$ باشد و توجه کنید که $L \geq \sqrt{6}$. بنابر قضیهٔ ۷.۲، دنبالهٔ $\left\{\frac{b_n}{2}\right\}$ به $\frac{L}{2}$ همگراست و دنبالهٔ $\left\{\frac{3}{b_n}\right\}$ به $\frac{3}{L}$. دنبالهٔ $\{b_{n+1}\}$ نیز به L همگراست، زیرا این دنباله همان دنبالهٔ $\{b_n\}$ بدون جملهٔ نخست آن است. بنابراین، از تساوی

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{b_n}$$

نتیجه می‌شود $L = \frac{L}{2} + \frac{3}{L}$ یا $\frac{L}{2} = \frac{3}{L}$. چون L عددی مثبت است، پس $L = \sqrt{6}$. به عبارت دیگر، دنبالهٔ $\{b_n\}$ به $\sqrt{6}$ همگراست.

به این ترتیب، یک راه برای اینکه ثابت کنیم دنباله‌ای همگراست بی‌آنکه حدش را پیدا کنیم این است که ثابت کنیم دنبالهٔ مورد نظر کراندار و یکنواست. چون دنباله‌های همگرا لزوماً یکنوا نیستند، خیلی خوب می‌شود که شرطی برای همگرایی داشته باشیم که ربطی به یکنوایی دنباله‌ها نداشته باشد. خوشبختانه، چنین شرطی وجود دارد و دنباله‌هایی را که چنین شرطی را دارند، به افتخار آگوستین-لویی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۶۷)، دنباله‌های کوشی می‌نامند. دنباله‌های کوشی نقشی مهم در آنالیز دارند و در همه جای این کتاب به آنها برمی‌خوریم. تعریف دنبالهٔ کوشی شبیه تعریف دنبالهٔ همگراست، بجز اینکه به جای اینکه بگوییم جمله‌ها سرانجام در نزدیکی عددی مانند L جمع می‌شوند، می‌گوییم جمله‌ها سرانجام نزدیک یکدیگر جمع می‌شوند.

تعریف ۱۱.۲ دنبالهٔ $\{x_n\}$ **دنباله‌ای کوشی** است، به شرطی که به‌ازای هر عدد مثبت مانند ε عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد که به‌ازای هر m و n که $m, n \geq N$، $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

برای روشن شدن این تعریف، دنبالهٔ $\{c_n\}$ را درنظر بگیرید که در اینجا به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. فرض کنید $\varepsilon > 0$ و عدد طبیعی N را طوری انتخاب کنید که $\frac{1}{N} < \varepsilon$. اگر $m, n \geq N$ و $n > m$، آن‌وقت

$$|c_n - c_m| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

بنابراین، دنبالهٔ $\{c_n\}$ دنباله‌ای کوشی است.

چون $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} > x_n$، پس (x_n) دنباله‌ای صعودی است. بنا به قضیهٔ همگرایی یکنوا ۲.۳.۳، این سؤال که «آیا دنباله همگرا است یا نه؟» به سؤال «آیا دنباله کراندار است یا نه؟» تقلیل می‌یابد. اگر سعی کنیم با بکار بردن محاسبات عددی مستقیم به حدس دربارهٔ احتمال کرانداری دنبالهٔ (x_n) برسیم، این کار بی‌نتیجه و ناقص خواهد ماند. کامپیوتر مقدار تقریبی $x_n \approx 11.4$ را برای $n = 50,000$، و $x_n \approx 12.1$ را برای $n = 100,000$ بدست می‌آورد. ممکن است کسی که بطور اتفاقی این اعداد را مشاهده می‌کند نتیجه بگیرد که دنباله کراندار است. امّا، روابط زیر ثابت می‌کنند که در حقیقت این دنباله واگرا است.

$$
\begin{aligned}
x_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}
$$

پس دنبالهٔ (x_n) بیکران است، و بنابراین (بنا به قضیهٔ ۲.۲.۳) واگرا است.

(ج) فرض کنیم $Y = (y_n)$ به روش استقرایی به صورت $y_1 := 1$، $y_{n+1} := \frac{1}{4}(2y_n + 3)$ برای $n \geqslant 1$ تعریف شده باشد. نشان می‌دهیم که $\lim Y = \frac{3}{2}$.

محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که $y_2 = \frac{5}{4}$. پس داریم $y_1 < y_2 < 2$. به استقراء نشان می‌دهیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n < 2$. در واقع، این برای $n = 1, 2$ درست است. اگر برای عددی مانند $k \in \mathbb{N}$، $y_k < 2$ برقرار باشد، آنگاه

$$
y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(4+3) = \frac{7}{4} < 2,
$$

پس $y_{k+1} < 2$. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n < 2$.

حال به استقراء نشان می‌دهیم که به‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n < y_{n+1}$. درستی این حکم برای $n = 1$ ثابت شده است. حال فرض می‌کنیم برای عددی مانند k، $y_k < y_{k+1}$؛ دراین صورت $2y_k + 3 < 2y_{k+1} + 3$، که از آن نتیجه می‌شود.

$$
y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3) = y_{k+2}.
$$

لذا $y_k < y_{k+1}$ رابطهٔ $y_{k+1} < y_{k+2}$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n < y_{n+1}$.

نشان داده‌ایم که دنبالهٔ $Y = (y_n)$ صعودی و از بالا به 2 کراندار است. از قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود که Y به حدی همگرا است که حداکثر 2 است. در این حالت محاسبهٔ $\sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ برای تعیین $\lim(y_n)$ چندان آسان نیست. ولیکن، روش دیگری برای محاسبهٔ مقدار این حد وجود دارد.

چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$، جملهٔ nام 1ـدُم Y یعنی Y_1، یک رابطهٔ جبری ساده با جملهٔ nام Y دارد. بنا به قضیهٔ ۹.۱.۳، داریم $y := \lim Y_1 = \lim Y$، بنابراین از قضیهٔ ۳.۲.۳ نتیجه می‌شود $y = \frac{1}{4}(2y + 3)$ (چرا؟)، و از این نتیجه می‌شود $y = \frac{3}{2}$.

(د) فرض کنیم $Z = (z_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که به صورت $z_1 := 1$، $z_{n+1} := \sqrt{2z_n}$ برای $n \in \mathbb{N}$ تعریف شده است. نشان می‌دهیم $\lim(z_n) = 2$.

توجه داریم که $z_1 = 1$ و $z_2 = \sqrt{2}$؛ پس $1 \leqslant z_1 < z_2 < 2$. ادعا می‌کنیم که دنبالهٔ Z صعودی و از بالا به 2 کراندار است. برای اثبات این ادعا، به روش استقراء نشان خواهیم داد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $1 \leqslant z_n < z_{n+1} < 2$. این مطلب برای $n = 1$ ثابت شده است. فرض می‌کنیم که برای $n = k$ درست باشد؛ در این صورت $2 \leqslant 2z_k < 2z_{k+1} < 4$، و از این نتیجه می‌شود (چرا؟)

$$1 < \sqrt{2} \leqslant z_{k+1} = \sqrt{2z_k} < z_{k+2} = \sqrt{2z_{k+1}} < \sqrt{4} = 2.$$

[در آخرین مرحله، مثال ۱۴.۲.۲ (الف) را بکار برده‌ایم.] پس درستی نامساوی $1 \leqslant z_k < z_{k+1} < 2$، درستی $1 \leqslant z_{k+1} < z_{k+2} < 2$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $1 \leqslant z_n < z_{n+1} < 2$.

چون $Z = (z_n)$ دنباله‌ای صعودی و کراندار است، از قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود که Z به عدد $z := \sup\{z_n\}$ همگرا است. می‌توان مستقیماً نشان داد که $\sup\{z_n\} = 2$، پس $z = 2$. دیگر اینکه، می‌توان روش بند (ج) را بکار برد. رابطهٔ $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$ رابطه‌ای بین جملهٔ nام 1ـدم Z یعنی Z_1، و جملهٔ nام Z ارائه می‌دهد. بنا به قضیهٔ ۹.۱.۳، داریم $\lim Z_1 = z = \lim Z$. بعلاوه، بنا به قضایای ۳.۲.۳ و ۱۰.۲.۳، نتیجه می‌شود که حد z باید در رابطهٔ $\sqrt{2z} = z$ صدق کند. پس z باید در معادلهٔ $z^2 = 2z$ صدق کند که دارای ریشه‌های $z = 0, 2$ است. چون جملات $Z = (z_n)$ همگی در $1 \leqslant z_n \leqslant 2$ صدق می‌کنند، از قضیهٔ ۶.۲.۳، نتیجه می‌شود که باید داشته باشیم $1 \leqslant z \leqslant 2$. بنابراین $z = 2$.

محاسبهٔ ریشهٔ دوم

۴.۳.۳ مثال فرض کنیم $a > 0$؛ دنبالهٔ (s_n) از اعداد حقیقی را چنان می‌سازیم که به $\sqrt{a}$ همگرا باشد.

فرض کنیم $s_1 > 0$ دلخواه باشد و برای $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم $s_{n+1} := \frac{1}{2}(s_n + \frac{a}{s_n})$. حال نشان می‌دهیم دنبالهٔ (s_n) به $\sqrt{a}$ همگرا است. (این روش برای محاسبهٔ ریشهٔ دوم، ۱۵۰۰ سال قبل از میلاد در بین‌النهرین شناخته شده بود.)

ابتدا نشان می‌دهیم برای $n \geqslant 2$، $s_n^2 \geqslant a$، چون s_n در معادلهٔ درجهٔ دوم $s_n^2 - 2s_{n+1}s_n + a = 0$ صدق می‌کند، این معادله دارای یک ریشهٔ حقیقی است. پس مبّین آن، $4s_{n+1}^2 - 4a$ باید نامنفی باشد؛

یعنی، $s_{n+1}^2 \geqslant a$ برای $n \geqslant 1$.

برای اثبات نهایتاً نزولی بودن (s_n)، توجه می‌کنیم که برای $n \geqslant 2$،

$$s_n - s_{n+1} = s_n - \frac{1}{2}(s_n + \frac{a}{s_n}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s_n^2 - a)}{s_n} \geqslant 0.$$

پس به‌ازای‌هر $n \geqslant 2$، $s_{n+1} \leqslant s_n$. از قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود که $s := \lim(s_n)$ موجود است. بعلاوه، بنا به قضیهٔ ۳.۲.۳ حد s باید در رابطهٔ $s = \frac{1}{2}(s + a/s)$ صدق کند، و از آن نتیجه می‌شود (چرا؟) $s = a/s$ یا $s^2 = a$. بنابراین $s = \sqrt{a}$.

به منظور محاسبه، در بسیاری از موارد مهم است که حدس بزنیم دنبالهٔ (s_n) با چه سرعتی به $\sqrt{a}$ همگرا است. مانند بالا، برای هر $n \geqslant 2$ داریم $\sqrt{a} \leqslant s_n$، که از آن نتیجه می‌شود $a/s_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant s_n$. لذا برای $n \geqslant 2$ داریم

$$0 \leqslant s_n - \sqrt{a} \leqslant s_n - \frac{a}{s_n} = \frac{s_n^2 - a}{s_n}.$$

با بکار بردن این نامساوی می‌توانیم با هر درجه دقت مطلوب $\sqrt{a}$ را محاسبه نمائیم. (چگونه؟)

عدد اویلر[1]

این بخش را با معرفی دنباله‌ای که به یکی از مهمترین اعداد «متعالی» در ریاضیات، بعد از عدد π، همگرا است به پایان می‌رسانیم.

۵.۳.۳ مثال فرض کنیم $e_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ برای $n \in \mathbb{N}$. نشان می‌دهیم دنبالهٔ $E = (e_n)$ کراندار و صعودی است؛ لذا همگرا است. حد این دنباله به **عدد اویلر** e معروف است، که مقدار تقریبی آن $2.718281828459045\ldots$ است، و به عنوان مبنای لگاریتم «طبیعی» در نظر گرفته می‌شود.

با بکار بردن قضیهٔ دوجمله‌ای، داریم

$$\begin{aligned} e_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} \\ + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}. \end{aligned}$$

با ساده کردن توانهای n در ضرایب دوجمله‌ای رابطهٔ

$$\begin{aligned} e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \\ + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}), \end{aligned}$$

1) Leonhard Euler(1707-1783)

را بدست می‌آوریم. بطور مشابه داریم

$$\begin{aligned} e_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) \\ +\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) \\ +\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}). \end{aligned}$$

توجه کنید که عبارت مربوط به e_n شامل $n+1$ جمله است، در حالی که عبارت نظیر به e_{n+1}، $n+2$ جمله دارد. بعلاوه، هر جمله در e_n از جملهٔ نظیرش در e_{n+1} کوچکتر یا مساوی است، و e_{n+1} یک جمله مثبت بیشتر دارد. بنابراین، داریم $2 \leqslant e_1 < e_2 < \cdots < e_n < e_{n+1} < \cdots$، پس جملات E صعودی هستند.

برای نشان دادن اینکه جملات E از بالا کراندار هستند، توجه می‌کنیم که اگر $p = 1, 2, \ldots, n$، آنگاه $(1-\frac{p}{n}) < 1$. بعلاوه $2^{p-1} \leqslant p!$ [ر. ک. ۳.۳.۱ (د).] پس $\frac{1}{p!} \leqslant \frac{1}{2^{p-1}}$. بنابراین، اگر $n > 1$، آنگاه داریم

$$2 < e_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

چون می‌توان ثابت کرد [ر. ک. ۳.۳.۱ (ه)]

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1-\frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

پس نتیجه می‌گیریم که به‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}$، $2 \leqslant e_n < 3$. از قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود که دنبالهٔ E به عددی حقیقی که بین 2 و 3 می‌باشد، همگرا است. عدد e را حد این دنباله تعریف می‌کنیم.

با دقیقتر کردن برآوردهای خود می‌توانیم تقریبهای گویای نزدیکتر به e را بدست آوریم، اما نمی‌توانیم آن را بطور دقیق محاسبه نمائیم، زیرا e یک عدد اصم است. با وجود این، می‌توان e را با هر تعداد رقم اعشار مطلوب محاسبه کرد. خواننده برای محاسبهٔ e_n به ازای مقادیر «بزرگ» n باید از ماشین حساب (یا از کامپیوتر) استفاده کند.

تمرینات بخش ۳.۳

۱. فرض کنید $x_1 > 1$ و برای $n \geqslant 1$، $x_{n+1} := 2 - \frac{1}{x_n}$. نشان دهید (x_n) کراندار و یکنوا است. حد آن را بدست آورید.

۲. فرض کنید $y_1 := 1$ و $y_{n+1} := \sqrt{2+y_n}$. نشان دهید (y_n) همگرا است و حد آن را بدست آورید.

۳. فرض کنید $a > 0$ و $z_1 > 0$. برای $n \in \mathbb{N}$، $z_{n+1} := (a+z_n)^{1/2}$ تعریف کنید. نشان دهید (z_n) همگرا است و حد آن را بدست آورید.

* زیردنباله‌ها و قضیه بولتسانو-وایرشتراس:

* **تعریف (زیردنباله):** فرض کنید $X=\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و $p_1<p_2<\dots<p_n<\dots$ دنباله‌ای صعودی اکید از اعداد طبیعی باشد. در این صورت دنباله $X'=\{x_{p_1}, x_{p_2}, x_{p_3},\dots, x_{p_n},\dots\}$ در $\mathbb{R}$ را یک زیردنباله X می‌گوییم.

* **مثال:** چند زیردنباله از دنباله $X=\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$ عبارتند از:

① $\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots\}$ ② $\{\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\dots\}$ ③ $\{\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\dots\}$

* **قضیه:** فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت:

(الف) اگر $\{x_n\}$ به L همگرا باشد آنگاه هر زیردنباله $\{x_n\}$ به L همگراست.

(ب) اگر $\{x_n\}$ دو زیردنباله داشته باشد که به حدهای مختلف همگرا باشند آنگاه دنباله $\{x_n\}$ همگرا نیست.

اثبات: صفحه ۹۵ کتاب راسل گوردون. ■

مثال ۱: قبلاً نشان داده‌ایم که دنباله $\{x_n=\sqrt[n]{n}\}$ به عدد ۱ همگراست. بنابراین هر یک از زیردنباله‌های زیر نیز

$\{\sqrt[1]{1},\sqrt[2]{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\dots\}$

طبق قضیه بالا به عدد ۱ همگرا هستند: (از (الف) قضیه بالا)

(الف) $\{\sqrt[1]{1},\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{5},\dots,\sqrt[2n+1]{2n+1},\dots\}$

(ب) $\{\sqrt[2]{2},\sqrt[4]{4},\sqrt[6]{6},\dots,\sqrt[2n]{2n},\dots\}$

(ج) $\{\sqrt[1]{1},\sqrt[4]{4},\sqrt[9]{9},\dots,\sqrt[n^2]{n^2},\dots\}$

مثال ۲: دنباله $X=\{(-1)^n\}$ واگراست. زیرا: $X=\{-1,1,-1,1,\dots\}$ و $X_1=\{1,1,1,\dots,(-1)^{2n},\dots\}$ زیردنباله‌ای از X به عدد $L_1=1$ و زیردنباله $X_2=\{-1,-1,-1,\dots,(-1)^{2n-1},\dots\}$ از X به عدد $L_2=-1$ همگراست. مشاهده می‌شود که دنباله X دو زیردنباله X_1 و X_2 دارد که X_1 به $L_1=1$ و X_2 به $L_2=-1$ همگرا و $L_1\neq L_2$. پس طبق قسمت (ب) قضیه بالا، دنباله $X=\{(-1)^n\}$ همگرا نیست و واگراست.

* **قضیه:** هر دنباله از اعداد حقیقی، زیردنباله‌ای یکنوا دارد.

یعنی هر دنباله از اعداد حقیقی مانند $\{a_n\}$، زیردنباله‌ای صعودی یا نزولی دارد.

اثبات: ص ۹۵ کتاب راسل گوردون. ■

ب) اگر $\{x_n\}$ دو زیردنباله داشته باشد که به حدهای مختلف همگرا باشند، آن‌وقت $\{x_n\}$ همگرا نیست.

اثبات. فرض کنید $\{x_n\}$ به L همگرا باشد و $\{x_{p_n}\}$ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ باشد. اگر $\varepsilon > 0$، عددی طبیعی مانند N وجود دارد که به‌ازای هر n که $n \geq N$، $|x_n - L| < \varepsilon$. چون به‌ازای هر n، $p_n \geq n$، پس به‌ازای هر n که $n \geq N$، $|x_{p_n} - L| < \varepsilon$. بنابراین، دنبالهٔ $\{x_{p_n}\}$ به L همگراست. این موضوع قسمت (الف) را ثابت می‌کند؛ اثبات قسمت (ب) بماند برای تمرین. ■

برای تبیین قسمت (ب) این قضیه، دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ را در نظر بگیرید. این دنباله زیردنباله‌هایی دارد که به حدهایی متمایز همگرا هستند؛ زیردنبالهٔ $\{(-1)^{2n}\}$ به 1 همگراست و زیردنبالهٔ $\{(-1)^{2n+1}\}$ به -1. بنابراین، دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ همگرا نیست.

ویژگی جالبی از دنباله‌های از عددهای حقیقی این است که هر دنباله از عددهای حقیقی زیردنباله‌ای یکنوا دارد. در مورد دنباله‌هایی که با دستور یا الگو تعریف شده‌اند، معمولاً تشخیص دادن زیردنباله‌ای یکنوا کار ساده‌ای است. دنبالهٔ

$$1, 3.9, 2.1, -1, 1, 3.99, 2.01, -1, 1, 3.999, 2.001, -1, \ldots$$

دست‌کم چهار زیردنبالهٔ یکنوا دارد؛ دنباله‌های ثابت $\{1\}$ و $\{-1\}$ و دنباله‌های

$$3.9, 3.99, 3.999, 3.9999, \ldots, \qquad 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \ldots$$

که به‌ترتیب صعودی و نزولی‌اند. با این همه، نوشتن زیردنباله‌ای یکنوا از دنباله‌ای از عددهای حقیقی که همین طوری داده شده است دشوارتر است. در اثبات قضیهٔ زیر روشی سریع و هوشمندانه برای نمایش دادن زیردنباله‌ای یکنوا آورده‌ایم.

قضیهٔ ۱۸.۲ هر دنباله از عددهای حقیقی زیردنباله‌ای یکنوا دارد.

اثبات. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از عددهای حقیقی باشد. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی مانند n باشد که a_n کرانی پایینی برای مجموعهٔ $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}$ است. اگر S نامتناهی باشد، آن‌وقت می‌توان S را به شکل دنباله‌ای صعودی اکید مانند $\{p_n\}$ نوشت و زیردنبالهٔ $\{a_{p_n}\}$ صعودی است. اگر S متناهی باشد، آن‌وقت عددی مانند N وجود دارد که از همهٔ عضوهای S بزرگ‌تر است. فرض کنید p_1 عددی طبیعی و بزرگ‌تر از N باشد. چون $p_1 \notin S$، a_{p_1} کرانی پایینی برای مجموعهٔ

$$\{a_{p_1+1}, a_{p_1+2}, a_{p_1+3}, \ldots\}$$

نیست، و در نتیجه عددی طبیعی مانند p_2 وجود دارد که $p_2 > p_1$ و $a_{p_2} < a_{p_1}$. به طور مشابه، عددی طبیعی مانند p_3 وجود دارد که $p_3 > p_2$ و $a_{p_3} < a_{p_2}$. اگر این فرایند را ادامه دهیم دنباله‌ای نزولی مانند $\{a_{p_n}\}$ به دست می‌آید. این موضوع اثبات را کامل می‌کند. ■

چون دنباله‌های یکنوا و کراندار همگرا هستند، زیردنباله‌های یکنوای دنباله‌های کراندار باید همگرا باشند. بنابراین، قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که هر دنبالهٔ کراندار زیردنباله‌ای همگرا دارد. این مطلب ویژگی خیلی مهمی از دنباله‌هاست و از آن در اثبات چندین حکم مهم در فصل‌های بعد استفاده می‌کنیم. نام دو ریاضیدان، برنهارت بولتسانو (۱۸۴۸-۱۷۸۱) و کارل وایرشتراس (۱۸۹۷-۱۸۱۵)، معمولاً به این قضیه پیوند خورده است. حالت خاصی از این قضیه را که در این کتاب اکثراً از آن استفاده می‌کنیم در قضیهٔ بعد آورده‌ایم؛ این حکم به سادگی از قضیهٔ ۱۹.۲ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۱۹.۲ قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس هر دنبالهٔ کراندار زیردنباله‌ای همگرا دارد. به‌ویژه، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $[a, b]$ باشد، آن‌وقت $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای مانند $\{x_{p_n}\}$ دارد که به عددی در $[a, b]$ همگراست. ■

بنابر قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس هر دنبالهٔ کراندار از عددهای حقیقی زیردنباله‌ای همگرا دارد، اما هر دنبالهٔ کراندار قطعاً بیشتر از یک زیردنبالهٔ همگرا دارد. در حقیقت، دنبالهٔ کرانداری که همگرا نیست، همواره دست‌کم دو زیردنباله دارد که به حدهایی مختلف همگرا هستند؛ اثبات این حکم بماند برای تمرین. گاهی دانستن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین حدی که زیردنباله‌های دنباله‌ای مفروض ممکن است داشته باشند به دردبخور است. این موضوع منجر به تعریف مفهوم حد زبرین و حد زیرین می‌شود.

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار از عددهای حقیقی باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، تعریف کنید

$$a_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots\}, \quad b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots\}$$

وجود این عددها را اصل موضوع کمال تضمین می‌کند. توجه کنید که $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار است و $\{b_n\}$ دنباله‌ای نزولی و کراندار. بنابر قضیهٔ ۱۰.۲، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا هستند؛ حدّ این دنباله‌ها را به‌ترتیب حد زیرین و حد زبرین دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامند. این مطلب را در تعریف زیر، که دنباله‌های بی‌کران را هم دربرمی‌گیرد، گنجانده‌ایم.

تعریف ۲۰.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از عددهای حقیقی باشد.

الف) اگر $\{x_n\}$ از پایین کراندار باشد، آن‌وقت **حد زیرین** $\{x_n\}$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf\{x_k : k \geq n\}\right)$$

* توضیحات بیشتر برای اثبات قضیه ۱ فرض ۸ جزوه برای حالت S متناهی:

فرض کنید مثلاً $S=\{27, 18, 47, 60\}$ یعنی S متناهی باشه. پس:

متناهی

گام ۱:

$\underset{p_1}{61} \notin S \longrightarrow$ طبق تعریف S این یعنی $a_{\underset{p_1}{61}}$ یک کران پایین برای مجموعه $X_1=\{a_{62}, a_{63}, a_{64}, \dots\}$ نیست $\longrightarrow$ a_{61} از همهٔ عناصر X_1 کوچکتر یا مساوی نیست $\longrightarrow$ a_{61} لااقل از یکی از عناصر X_1 بزرگتر است

یعنی اندیسی مانند p_2 (مثلاً فرض کنید ۷۳) وجود دارد که

$$\exists p_2=73:\quad a_{\underset{p_2}{73}} < a_{\underset{p_1}{61}} \qquad (1)$$

$$73=p_2>p_1=61$$

گام ۲: مشابه گام ۱

$73 \notin S \longrightarrow$ طبق تعریف S، یعنی a_{73} یک کران پایین برای مجموعهٔ $\{a_{74}, a_{75}, a_{76}, \dots\}$ نیست $\longrightarrow$ a_{73} از همهٔ عناصر X_2 کوچکتر یا مساوی نیست $\longrightarrow$ a_{73} لااقل از یکی از عناصر X_2 بزرگتر است

یعنی اندیسی مانند p_3 (مثلاً فرض کنید ۱۰۵) وجود دارد که

$$\exists p_3=105:\quad a_{\underset{p_3}{105}} < a_{\underset{p_2}{73}} \qquad (2)$$

$$105=p_3>p_2=73$$

با ادامهٔ این فرآیند، به دنباله‌ای نزولی از اعداد

$$\underset{\text{از }(1)}{a_{p_1}>a_{p_2}}\underset{\text{از }(2)}{>a_{p_3}}>\dots \qquad (a_{61},\ a_{73},\ a_{105})$$

می‌رسیم و به این ترتیب، به زیردنبالهٔ نزولی $\{a_{p_n}\}$ مورد نظر برای حالتی که S متناهی باشه، می‌رسیم. $\blacksquare$

ل ۹

* قضیه (بولتسانو - وایراشتراس): هر دنباله‌ی کراندار از اعداد حقیقی، زیردنباله‌ای همگرا دارد.

اثبات: فرض کنید $X=\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد. پس:

از آنجا که طبق قضیه قبل، دنباله X زیردنباله‌ای یکنوا (صعودی یا نزولی) مانند X_1 دارد.

از طرفی چون دنباله X کراندار است پس هر زیردنباله‌اش از جمله X_1 نیز کراندار است.

زیردنباله X_1، یکنوا و کراندار است

پس طبق قضیه همگرایی یکنوا، زیردنباله X_1 همگراست. ■

* دنباله‌ی کوشی:

* تعریف: دنباله $X=\{x_n\}$ از اعداد حقیقی را دنباله‌ی کوشی می‌نامیم هرگاه

$$\forall \varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}, \forall m,n\ge N_0: |x_m-x_n|<\varepsilon.$$

مثال: دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ یک دنباله‌ی کوشی است.

زیرا: باید نشان دهیم $x_n=\frac{1}{n}$

$$\forall \varepsilon>0, \overset{?}{\exists} N_0\in\mathbb{N}; \forall m,n\ge N_0: |x_m-x_n|<\varepsilon$$

یعنی

$$|x_m-x_n|=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|\le\left|\frac{1}{m}\right|+\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le\frac{1}{N_0}+\frac{1}{N_0}=\frac{2}{N_0}<\varepsilon. \checkmark$$

البته اگر N_0 را طوری انتخاب شود که $\frac{2}{N_0}<\varepsilon$، یعنی $\frac{2}{\varepsilon}<N_0$.

مثال: با استفاده از تعریف ثابت کنید که دنباله $\{\frac{n}{n+3}\}$ کوشی است.

حل: باید نشان دهیم x_n

$$\forall \varepsilon>0, \overset{?}{\exists} N_0\in\mathbb{N}, \forall m,n\ge N_0: |x_m-x_n|<\varepsilon$$

یعنی

$$|x_m-x_n|=\left|\frac{m}{m+3}-\frac{n}{n+3}\right|=\left|\frac{mn+3m-mn-3n}{(m+3)(n+3)}\right|=\left|\frac{3m-3n}{(m+3)(n+3)}\right|$$

از نامساوی مثلث — چون $m,n\in\mathbb{N}$

$$\le\left|\frac{3m}{(m+3)(n+3)}\right|+\left|\frac{3n}{(m+3)(n+3)}\right|=\frac{3m}{(m+3)(n+3)}+\frac{3n}{(m+3)(n+3)}\le\frac{3m}{mn}+\frac{3n}{mn}$$

$$=\frac{3}{n}+\frac{3}{m}\le\frac{3}{N_0}+\frac{3}{N_0}=\frac{6}{N_0}<\varepsilon. \checkmark$$

البته اگر N_0 را طوری انتخاب شود که $\frac{6}{N_0}<\varepsilon$ یعنی $\frac{6}{\varepsilon}<N_0$.

* قضیه: هر دنباله‌ی همگرا از اعداد حقیقی، کوشی است.

اثبات: فرض کنید $X=\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا است. فرض کنید به عدد l همگرا باشد. پس طبق تعریف همگرایی دنباله داریم

$$\forall \varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}; \forall n\ge N_0: |x_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

پس: برای هر $m,n\ge N_0$ داریم: از (1) و $m,n\ge N_0$ — نامساوی مثلثی

$$\Rightarrow \forall m,n\ge N_0: |x_m-x_n|=|x_m-l+l-x_n|\le|x_m-l|+|x_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \checkmark \ ■$$

جلسه ۱۰

*لم: هر دنباله‌ی کوشی از اعداد حقیقی، کراندار است.

اثبات) فرض کنید $X=\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی باشد. پس برای هر $\varepsilon>0$ از جمله $\varepsilon=1$:

$$\exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall m,n\ge N_0:\ |x_m-x_n|<\varepsilon=1$$

از جمله برای $m=N_0$: $|x_{N_0}-x_n|<1 \Rightarrow |x_n-x_{N_0}|<1$

پس تا اینجا نتیجه شد که

$$\forall n\ge N_0:\ |x_n-x_{N_0}|<1 \Rightarrow \underbrace{\big||x_n|-|x_{N_0}|\big|\le|x_n-x_{N_0}|<1}$$

$$\big||x_n|-|x_{N_0}|\big|<1$$

$$-1<|x_n|-|x_{N_0}|<1 \rightarrow |x_n|<|x_{N_0}|+1 \quad \forall n\ge N_0$$

اکنون با انتخاب $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_{N_0-1}|,|x_{N_0}|+1\}$ نتیجه می‌شود

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ |x_n|\le M \rightarrow$$

پس $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار است. $\blacksquare$

*قضیه (معیار همگرایی کوشی): فرض کنید $X=\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت:

دنباله‌ی X کوشی باشد $\Longleftrightarrow$ دنباله‌ی X همگراست

اثبات) $\Rightarrow$: در قضیه‌ی قبل این گزاره (یعنی هر دنباله‌ی همگرا از اعداد حقیقی، کوشی است) اثبات شد.

پس باید $\Leftarrow$ را اثبات کنیم. یعنی فرض کنیم دنباله‌ی $X=\{x_n\}$ از اعداد حقیقی کوشی باشد باید ثابت کنیم X همگراست.

برای این کار، چون دنباله‌ی X کوشی است پس طبق لم بالا، X کراندار است. بنابراین طبق قضیه بولتسانو-وایرشتراس (صفحه قبل)، دنباله‌ی X، زیردنباله‌ای همگرا مانند $X_1=\{x_{p_n}\}$ دارد که به عددی مانند x^* همگراست. نشان می‌دهیم دنباله‌ی X به x^* همگراست تا حکم به دست بیاید. برای این کار،

اولاً: $X=\{x_n\}$ کوشی $\longrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall m,n\ge N_0:\ |x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ ①

ثانیاً: $X_1=\{x_{p_n}\}$ زیردنباله‌ی همگرا به x^* $\longrightarrow$ برای $\varepsilon>0$ بالا،

$$\exists N_1\ge N_0;\ \forall n\ge N_1:\ |x_n-x^*|<\varepsilon$$

از جمله برای $n=N_1$: $|x_{N_1}-x^*|<\frac{\varepsilon}{2}$ ②

از طرفی با انتخاب $m=N_1$ و ①:
$|x_{N_1}-x_n|<\varepsilon$

$$\Longrightarrow \forall n\ge N_0:\ |x_n-x^*|=|x_n-x_{N_1}+x_{N_1}-x^*|\le|x_n-x_{N_1}|+|x_{N_1}-x^*|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Longrightarrow \forall n\ge N_0:\ |x_n-x^*|<\varepsilon \longrightarrow$ $\varepsilon>0$ دلخواه بود، پس طبق تعریف همگرایی دنباله، دنباله‌ی X به x^* همگراست.

* **مثال:** دنباله‌ی $\left\{x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\right\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید این دنباله همگرا است.

حل) اگر ثابت کنیم این دنباله کوشی است آنگاه طبق قضیه‌ی معیار همگرایی کوشی نتیجه می‌گیریم این دنباله همگرا است.

(**تذکر:** قضیه‌ی معیار همگرایی کوشی، شرطی است که همگرایی دنباله‌های از اعداد حقیقی را بدون نیاز به داشتن مقدار حد آن ایجاب نماید و دنباله‌ها یکنوا نیز محدود نباشد.)

ادامه حل مثال: برای اثبات کوشی بودن دنباله‌ی $\{x_n\}$ باید نشان دهیم

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall m,n\ge N_0:\ |x_m-x_n|<\varepsilon$$

یعنی

$$\frac{1}{k^2}\le\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

$$|x_m-x_n|=\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\right| \underset{m\ge n}{\overset{\text{با فرض}}{=}} \left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(-1)^k}{k^2}\right|\le\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}$$

توجه:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}A_k-\sum_{k=1}^{n}A_k=(A_1+A_2+\dots+A_n+A_{n+1}+\dots+A_m)-(A_1+A_2+\dots+A_n)=A_{n+1}+A_{n+2}+\dots+A_m=\sum_{k=n+1}^{m}A_k\right)$$

$$\le\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k(k-1)}\right)=\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\le\frac{1}{N_0}+\frac{1}{N_0}=\frac{2}{N_0}<\varepsilon.\ \checkmark$$

از قاعده تلسکوپی:

$$\left(=\left(\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{m-1}}-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$$

البته اگر $\frac{2}{\varepsilon}<N_0$ انتخاب شود.

پس ثابت کردیم دنباله‌ی $\{x_n\}$ کوشی است و بنابراین طبق قضیه معیار همگرایی کوشی (قضیه قبل)، نتیجه می‌گیریم دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا است. ✓

* **تعریف** (دنباله‌ی انقباضی): دنباله‌ی $X=\{x_n\}$ از اعداد حقیقی را انقباضی می‌نامیم هرگاه عددی مانند c که $0<c<1$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ |x_{n+2}-x_{n+1}|\le c\,|x_{n+1}-x_n|.$$

عدد c را ثابت دنباله‌ی انقباضی می‌نامیم.

* **مثال:** دنباله‌ی $\left\{x_n=\frac{1}{2^n}\right\}$ یک دنباله‌ی انقباضی است. چرا؟

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|=\left|\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right|=\left|\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right|=\left|\frac{1}{2^{n+1}}\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{-1}{2^{n+2}}\right|=\frac{1}{2^{n+2}}$$

$$|x_{n+1}-x_n|=\left|\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right|=\left|\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right|=\left|\frac{1}{2^n}\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{-1}{2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow |x_{n+2}-x_{n+1}|=\frac{1}{2^{n+2}}=\frac{1}{2\times2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}|x_{n+1}-x_n|$$

پس می‌توانیم $\le$ نیز بگذاریم

$$\Longrightarrow |x_{n+2}-x_{n+1}|\le\frac{1}{2}|x_{n+1}-x_n|\Longrightarrow$$

دنباله‌ی $\left\{x_n=\frac{1}{2^n}\right\}$ یک دنباله‌ی انقباضی با $c=\frac{1}{2}$ است.

همان c

* **قضیه:** هر دنباله‌ی انقباضی، یک دنباله‌ی کوشی است و بنابراین همگرا است.

(تمرین) ← البته اثبات در صفحه‌ی ۱۱۶ کتاب بارتل آمده است.

قضیه ۷.۵.۳: هر دنبالهٔ انقباضی، یک دنبالهٔ کوشی است و بنابراین همگراست.

برهان. اگر رابطهٔ تعریف برای دنبالهٔ انقباضی را متوالیاً بکار بریم، می‌توانیم به صورت زیر به ابتدای دنباله برگردیم.

$$\begin{aligned}|x_{n+2}-x_{n+1}| &\leqslant C|x_{n+1}-x_n| \leqslant C^2|x_n-x_{n-1}| \\ &\leqslant C^3|x_{n-1}-x_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant C^n|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

برای $m>n$، ابتدا با بکار بردن نامساوی مثلث و سپس با استفاده از فرمول حاصلجمع تصاعد هندسی (ر. ک. ۳.۳.۱ (هـ)) $|x_m-x_n|$ را تخمین می‌زنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}|x_m-x_n| &\leqslant |x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n| \\ &\leqslant (C^{m-2}+C^{m-3}+\cdots+C^{n-1})|x_2-x_1| \\ &= C^{n-1}(C^{m-n-1}+C^{m-n-2}+\cdots+1)|x_2-x_1| \\ &= C^{n-1}\left(\frac{1-C^{m-n}}{1-C}\right)|x_2-x_1| \leqslant C^{n-1}\left(\frac{1}{1-C}\right)|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

چون $0<C<1$، می‌دانیم $\lim(C^n)=0$ [ر. ک. ۱۱.۱.۳ (ج)]. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که (x_n) یک دنبالهٔ کوشی است. حال از معیار همگرایی کوشی ۴.۵.۳ نتیجه می‌شود که (x_n) دنبالهٔ همگرا است. □

در روند محاسبهٔ حد یک دنبالهٔ انقباضی، اغلب داشتن تخمین از خطا در مرحلهٔ nام خیلی مهم است. در نتیجهٔ بعدی دو تا از چنین تخمینهایی را می‌آوریم: اولی با دو جملهٔ اول دنباله ارتباط دارد؛ و دومی تفاضل x_n-x_{n-1} را در بر دارد.

۸.۵.۳ نتیجه اگر $X:=(x_n)$ یک دنبالهٔ انقباضی با ثابت C، $0<C<1$، باشد، و اگر $x^*:=\lim X$، آنگاه:

(i) $|x^*-x_n| \leqslant \dfrac{C^{n-1}}{1-C}|x_2-x_1|$،

(ii) $|x^*-x_n| \leqslant \dfrac{C}{1-C}|x_n-x_{n-1}|$.

برهان. در اثبات قضیه قبل دیدیم که اگر $m>n$، آنگاه $|x_m-x_n| \leqslant \dfrac{C^{n-1}}{1-C}|x_2-x_1|$. پس از حد گرفتن (نسبت به m) از این نامساوی، (i) بدست می‌آید.

برای اثبات (ii)، یادآوری می‌کنیم که اگر $m>n$، آنگاه

$$|x_m-x_n| \leqslant |x_m-x_{m-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|.$$

* حل چند مثال:

۱- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{5^n} = ?$

حل) اولاً: $x_n = \frac{n^5}{5^n} > 0$. ثانیاً: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{n^5} = \frac{1}{5}<1$

پس طبق قضیه، $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{5^n} = 0$.

۲- $\lim\limits_{n\to\infty} (4n)^{\frac{1}{n}} = ?$

حل) $\lim\limits_{n\to\infty}(4n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{4}\,\sqrt[n]{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}\,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1\times 1 = 1$

۳- به کمک قضیه همگرایی یکنوا نشان دهید دنباله $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ همگراست.

حل) اولاً: با فرض $x_n = \frac{n}{n+1}$ داریم: $\forall n:\ x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$

$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \Longrightarrow \forall n:\ x_{n+1} > x_n$$

ولذا دنباله $\{x_n\}$ صعودی است (البته از $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$ و اینکه $x_n > 0$ نیز می‌توان نتیجه گرفت $\{x_n\}$ صعودی است).

ثانیاً: برای هر $n\in N$، $0 < x_n = \frac{n}{n+1} < 1$. این یعنی دنباله $\{x_n\}$ کراندار است (ولذا از بالا کراندار است).

پس از اولاً و ثانیاً و قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌گیریم که دنباله $\{x_n\}$ همگراست.

۴- آیا دنباله $\left\{n + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ کوشی است؟ چرا؟

حل) خیر، زیرا این دنباله واگراست (به ∞ میل می‌کند) و لذا کوشی نیست.

۵- آیا دنباله $\left\{\frac{4n-3}{5n+2}\right\}$ کوشی است؟ چرا؟

حل) بله - چون این دنباله به $\frac{4}{5}$ همگراست ولذا کوشی است.

۶- آیا دنباله $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$ همگراست؟ چرا؟

خیر- زیرا اگر دو زیردنباله از این دنباله به صورت زیر:

$\underset{K\in N}{n=3K} \to \{\sin(K\pi)\}_{K\in N} = \{0,0,0,\dots\} \longrightarrow$ زیردنباله ثابت صفر $\longrightarrow$ همگرا به صفر

$\underset{K\in N}{n=3(2K+\frac{1}{3})} \to \left\{\sin\left(2K\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right\}_{K\in N} = \left\{\sin\frac{\pi}{3}\right\}_{K=1}^{\infty} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \dots\right\} \longrightarrow$ زیردنباله ثابت $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\longrightarrow$ همگرا به $\frac{\sqrt{3}}{2}$

مشاهده می‌کنیم که دنباله $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$ دو زیردنباله دارد که یکی به $l_1 = 0$ و دیگری به $l_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ همگراست و $l_1 \neq l_2$، لذا دنباله $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$ واگراست.

۳

حد و پیوستگی

مفهوم حد حساب دیفرانسیل و انتگرال را از جبر متمایز می‌کند و مبنایی برای تعریف تابع‌های پیوسته، مشتق تابع و انتگرال تابع فراهم می‌آورد. درک شهودی این مفهوم نسبتاً ساده است اما، در عین حال، فهمیدن کامل آن دشوار است. مفهوم حد طی قرن‌های متمادی تکوین یافته است و نقش اصلی را در شکل‌گیری مفهوم مشتق داشته است که در اواخر قرن هفدهم میلادی شکل گرفته است. با این حال، تعریف کنونی حد آن چیزی است که در میانهٔ قرن نوزدهم صورت گرفته است. این موضوع نشان می‌دهد که حتی ریاضیدانان برای درک مفهوم حد سال‌ها تلاش کرده‌اند و اینکه بهترین راه ارائهٔ این مطلب چیست.

قطعاً پیش از این به نمادگذاری $\lim_{x\to c} f(x) = L$ برخورده‌اید و حدهایی را حساب کرده‌اید. هنگام معرفی حد به دانشجویان حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده از مفهوم حرکت مفید است. با حرکت کردن x ورودی به سمت c، $f(x)$ خروجی به سمت L حرکت می‌کند. این طرز تفکر دربارهٔ حد منجر به عبارتی چون «با میل کردن x به c، $f(x)$ به سمت L می‌رود» می‌شود. با اینکه چنین تفکر شهودی‌ای ممکن است مفید باشد، اما درک اینکه مفهوم حد مستقل از حرکت و هندسه است مهم است. این مفهوم از ویژگی‌های حسابی مجموعهٔ عددهای حقیقی است. همان طور که خواهیم دید، تعریف حد مبتنی بر ویژگی‌های تابع قدرمطلق است، و وجود حد را اصل موضوع کمال تضمین می‌کند.

در این فصل، حد تابع را تعریف خواهیم کرد و سپس برای تعریف تابع پیوسته از آن استفاده می‌کنیم. بقیهٔ فصل به بررسی برخی ویژگی‌های تابع‌های پیوسته اختصاص دارد. با چند تا از این ویژگی‌ها، مانند قضیهٔ مقدار میانی و قضیهٔ مقدار اکسترمم، از درس حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا هستید، اما دیدن و فهمیدن اثبات‌هایشان، که به اصل موضوع کمال احتیاج دارد، احتمالاً برایتان تجربهٔ جدیدی است.

ص ۱۲

فصل ۳ : حد و پیوستگی

* **تعریف :** فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطه c است و f تابعی باشد که روی I به جز احتمالاً در c تعریف شده است.
حد تابع f در c برابر با l است به شرطی که

$$\forall \varepsilon>0 ,\ \exists \delta>0 ,\ \forall x\in I,\ 0<|x-c|<\delta \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon .$$

δ هم به ε و هم به c وابسته است.

در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to c} f(x)=l$ هرگاه f در $x=c$ حد نداشته باشد می‌گوییم f در c واگراست.

مثال: ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)=3$

حل) با توجه در این مثال، $c=2$ و $f(x)=4x-5$ و $l=3$ باید ثابت کنیم

$$\forall \varepsilon>0 ,\ \exists \delta>0 ,\ \forall x: \underbrace{0<|x-2|<\delta}_{(*)} \Longrightarrow \underbrace{|(4x-5)-3|}_{\text{یعنی}}<\varepsilon$$

$$|(4x-5)-3| = |4x-8| = |4(x-2)| = 4|x-2| \underset{\text{از }(*)}{<} 4\delta < \varepsilon$$

البته اگر δ به گونه‌ای انتخاب شود که $4\delta<\varepsilon$ یعنی به عبارتی کافی است δ به گونه‌ای انتخاب شود که $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$ و حکم به دست می‌آید.

مثال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$

$c=3$ و $f(x)=x^2$ و $l=9$

حل) باید ثابت کنیم

$$\forall \varepsilon>0 ,\ \exists \delta>0 ,\ \forall x: \underbrace{0<|x-3|<\delta}_{(*)} \Longrightarrow \underbrace{|x^2-9|}_{\text{یعنی}}<\varepsilon .$$

$$|x^2-9| = |(x-3)(x+3)| = |x-3||x+3| \underset{\text{از }(*)}{<} \delta\underbrace{|x+3|}_{\text{شامل متغیر } x} \quad (**)$$

توجه: مضربی از δ نیست زیرا دقت می‌کنیم مضربی از δ یعنی به صورت $r\delta$ که r عددی ثابت است و r فاقد x است!

توضیح: حال برای اینکه در ادامه از دست x خلاص شویم باید یک کران بالا برای $|x+3|$ پیدا کنیم، یعنی مثلاً عددی مثل r پیدا کنیم به طوری که برای x ها به قدر کافی نزدیک $c=3$ داشته باشیم $|x+3|<r$ آنگاه در ادامه (**) می‌توانیم بنویسیم

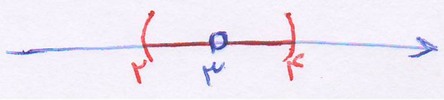
$$\delta|x+3|<\delta r<\varepsilon$$

چون دقت $x\to 3$ پس x به قدر کافی به $c=3$ نزدیک می‌شود

البته اگر δ به گونه‌ای اختیار شود که $\delta<\frac{\varepsilon}{r}$ و بدین ترتیب حکم حاصل خواهد شد.

اکنون برای یافتن یک کران بالا برای $|x+3|$، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

چون $\delta>0$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\underbrace{0<|x-3|<\delta}_{(1)}$ و فرض کنی



و از طرفی $x \to 3$ ، یعنی x به قدر کافی به $c=3$ نزدیک است پس قرار می‌گذاریم δ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\delta \le 1$ (۲) (البته می‌توانیم δ را به گونه‌ای اختیار کنیم که $\delta \le 5$ یا مثلاً $\delta \le 100$ یا $\delta \le 0/1$ یا $\delta \le 0/01$ ، ولی چون عدد ۱ ، عدد مثبت خوش دستی است با $\delta \le 1$ در ادامه کار، راحت‌تریم). پس از ① و ② داریم:

$$|x-3|<1 \Rightarrow -1<x-3<1 \Rightarrow 2<x<4$$

$$\Rightarrow 5<x+3<7 \Rightarrow |x+3|<\max\{|5|,|7|\}$$

$$\Rightarrow |x+3|<7$$

این همان کران بالای مورد نظری که در توضیح صفحه قبل به دنبالش بودیم!

پس در ادامهٔ (**) می‌توانیم بنویسیم

$$|x^2-9|<\delta|x+3|<7\delta<\varepsilon$$

البته باید δ به گونه‌ای باشد که $\delta<\frac{\varepsilon}{7}$. (۳)

از طرفی طبق ② قرار شد δ به گونه‌ای باشد که $\delta \le 1$ ، لذا در مجموع از ② و ③ ، δ باید به گونه‌ای اختیار شود که

$$\delta \le 1 \quad \text{و} \quad \delta<\frac{\varepsilon}{7}$$

یعنی اشتراک

بنابراین δ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$\Rightarrow \delta<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{7}\right\}$$

مثال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-3}{x+2}=-\frac{1}{3}$.

حل) باید ثابت کنیم

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x:\ \underbrace{0<|x-1|<\delta}_{(*)} \Rightarrow \left|\frac{x^2+x-3}{x+2}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right|<\varepsilon$$

یعنی

$$\left|\frac{x^2+x-3}{x+2}+\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3x^2+3x-9+x+2}{3(x+2)}\right|$$

$$\le\frac{|3x^2+4x-7|}{|x+2|}=\frac{|(3x+7)(x-1)|}{|x+2|}$$

توضیح ۱:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+4x-7 & x-1 \\ \hline -3x^2+3x & 3x+7 \\ 7x-7 & \\ -7x+7 & \\ 0 & \end{array}$$

همان $x-c$ است

$$=\frac{|3x+7|\,|x-1|}{|x+2|}<\frac{|3x+7|\,\delta}{|x+2|}\quad(**)$$

از (*)

توضیح ۲: اکنون باید دو کار انجام دهیم: ۱- یک کران بالا برای $|3x+7|$ مثلاً $r_1>0$ بیابیم یعنی عددی مانند $r_1>0$ که $|3x+7|<r_1$ برای x های به قدر کافی نزدیک $c=1$

۲- یک کران پایین برای $|x+2|$ مثلاً $r_2>0$ بیابیم یعنی عددی مانند $r_2>0$ که $|x+2|>r_2$ برای x های نزدیک $c=1$

تا: $\frac{1}{|x+2|}<\frac{1}{r_2}$

آنگاه می‌توانیم در ادامهٔ (**) بنویسیم: $<\frac{r_1}{r_2}\delta<\varepsilon$ البته به شرطی که δ به گونه‌ای اختیار شود که $\delta<\frac{r_2}{r_1}\varepsilon$ و حکم حاصل می‌شود!

برای این کار، مثل به شکل قبل عمل می‌کنیم. یعنی قرار می‌گذاریم δ را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $\delta \le 1$. ①

توجه کنید که این 1 ربطی به $\varepsilon = 1$ ندارد! به توضیحات داخل پرانتز در خط دوم بالای ص ۱۳ توجه کنید!

از طرفی طبق (*)، x به‌گونه‌ای است که $|x-1|<\delta$ ②. بنابراین از ① و ② داریم:

$$\underset{\text{از ②}}{|x-1|<\delta}\underset{\text{از ①}}{\le 1} \Rightarrow |x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1$$

$$\Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow \begin{cases} 0<3x<6 \to 7<3x+7<13 \to |3x+7|<\max\{|7|,|13|\} \Rightarrow |3x+7|<13 \quad ③ \\ 2<x+2<4 \to 2<|x+2|<4 \end{cases}$$

این همان ۲ در توضیح ۲

این همان ۲ در توضیح ۲

$$\frac14 < \frac{1}{|x+2|} < \frac12 \to \frac{1}{|x+2|} < \frac12 \quad ④$$

این همان $\frac12$ در توضیح ۲

بنابراین با توجه به ③ و ④، در ادامهٔ (**) می‌توانیم بنویسیم

$$\left|\frac{x^2+x+3}{x+2}+\frac12\right| < \frac{|3x+7|}{|x+2|}\delta < 13\left(\frac12\right)\delta = \frac{13}{2}\delta < \varepsilon$$

البته باید δ به‌گونه‌ای باشد که $\delta<\frac{2\varepsilon}{13}$ ⑤

از طرفی طبق ① قرار شد $\delta \le 1$ باشد و لذا در مجموع از ① و ⑤، δ باید به‌گونه‌ای اختیار شود که

$$\delta \le 1 \quad \text{و} \quad \delta < \frac{2\varepsilon}{13}$$

بنابراین δ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\xRightarrow{\text{اشتراک}} \delta < \min\{1, \frac{2\varepsilon}{13}\}$

* **قضیه** (معیار دنباله‌ای برای حدها): فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطهٔ c است و f تابعی باشد که روی I به جز احتمالاً در c تعریف شده است.

(الف) $\lim_{x\to c} f(x)=l \iff$ برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $I-\{c\}$، هرگاه $x_n\to c$ آنگاه $f(x_n)\to l$ — یعنی $\lim_{x_n\to c} f(x_n)=l$ — معیار همگرایی

فرض این گزاره p باشد — فرض این گزاره q باشد

(ب) فرض کنید دنباله‌هایی مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در $I-\{c\}$ وجود داشته باشند که $x_n\to c$ و $y_n\to c$ و $f(x_n)\to l_1$ و $f(y_n)\to l_2$، $l_1\neq l_2$. آنگاه تابع f در c حد ندارد. — معیار واگرایی ۱

صد ۱۵

اثبات)

اثبات (الف):

اثبات $p \Rightarrow q$ که بسیار واضح است. یعنی فرض کنیم گزاره p برقرار باشد. آنگاه با توجه به "p"، به سادگی گزاره q حاصل است. ✓

اثبات $q \Rightarrow p$: برای اثبات $q \Rightarrow p$، معادل آن یعنی $\sim p \Rightarrow \sim q$ را اثبات می‌کنیم. یعنی فرض کنیم $\sim p$ برقرار باشد. یعنی $\lim_{x \to c} f(x) \neq l$. این یعنی وقتی $x \to c$ آنگاه حد تابع f برابر l نیست، پس به نوعی، تعریف حد تابع f وقتی $x \to c$ برابر l است، نقض شده است. پس با نقض تعریف حد داریم (یعنی نقض گزاره $(\forall \varepsilon>0; \exists \delta>0, \forall x \in I; 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon)$

$$\exists \varepsilon>0, \forall \delta>0, \exists x \in I; 0<|x-c|<\delta, |f(x)-l| \not< \varepsilon$$

از جمله برای

بنابراین:

$$\exists \varepsilon>0, \quad \delta=\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in I, \underbrace{0<|x_n-c|<\frac{1}{n}}_{①}, \underbrace{|f(x_n)-l| \geq \varepsilon}_{②}$$

توجه: $\varepsilon>0$ عددی ثابت و مثبت است

x مربوط به $\delta=\frac{1}{n}$ را اصطلاحاً x_n می‌نامیم

③
$$\begin{cases} \exists x_1 \leftarrow \delta=\frac{1}{1} & \text{پس برای} \\ \exists x_2 \leftarrow \delta=\frac{1}{2} & \text{برای} \\ \exists x_3 \leftarrow \delta=\frac{1}{3} & \text{برای} \\ \vdots \end{cases}$$

پس نتیجه: بدین ترتیب به دنباله‌ای از عناصر I مانند $\{x_n\}$ دست می‌یابیم که (با توجه به ③) $x_n \xrightarrow{n \to \infty} c$ (با توجه به ①) ولی $f(x_n) \not\to l$ (با توجه به ②).

این نتیجه، دقیقاً همان $\sim q$ است. (با توجه به گزاره q، گزاره $\sim q$ دقیقاً نتیجه بالا می‌شود!)

پس در نهایت از $\sim p$ به $\sim q$ رسیدیم. یعنی $\sim p \Rightarrow \sim q$ و لذا این یعنی $q \Rightarrow p$. ✓

اثبات (ب): فرض کنید فرضهای قسمت (ب) برقرار باشد. در این صورت گزاره $\sim q$ را خواهیم داشت و بنابر (الف) و قضیه عکس نقیض (اولین قضیه ص ۳ جزوه) از $\sim q$ به $\sim p$ می‌رسیم (زیرا در صورت وجود حد f در c، باید حد هر دنباله همگرا به c، عدد ثابتی مانند l باشد ولی چون $l_1 \neq l_2$ لذا هیچ عدد منحصر بفرد l همگرا نیست!)

*نتیجه (معیار دنباله‌ای ۲): طبق قسمت (الف) قضیه قبل، داریم $p \Leftrightarrow q$. پس داریم $p \Rightarrow q$ و لذا داریم $\sim q \Rightarrow \sim p$. می‌توان نتیجه گرفت:

اگر دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $I-\{c\}$ وجود داشته باشد به طوری که $x_n \to c$ ولی $f(x)$ همگرا نباشد $\Longrightarrow$ f در c حد ندارد

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ در $\mathbb{R}$ موجود نیست.

حل) در اینجا $f(x)=\frac{1}{x}$ و $c=0$. دنباله‌ی $\{x_n=\frac{1}{n}\}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم $x_n=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0=c$

ولی $f(x_n)=\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$. یعنی به نوعی داریم $x_n\to c$ ولی $f(x_n)\to\infty$

و لذا طبق نتیجه صفحه قبل (ص ۱۵)، f در c حد ندارد یعنی $f(x)=\frac{1}{x}$ در $c=0$ حد ندارد.

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ موجود نیست.

حل) می‌دانیم
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$
همان $f(x)$ است و $c=0$.

دنباله $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌شود که $x_n=\frac{(-1)^n}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0=c$ ولی

$$f(x_n)=\operatorname{sgn}(x_n)=\operatorname{sgn}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)=(-1)^n$$

که قبلاً در فصل دنباله‌ها نشان دادیم واگرا است. پس طبق نتیجه‌ی ص ۱۵، $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ وجود ندارد.

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ در $\mathbb{R}$ موجود نیست.

حل) در اینجا $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ و $c=0$. دو دنباله‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ ارائه می‌کنیم که $\begin{cases}x_n\to c=0\\ y_n\to c=0\end{cases}$ ولی

$\begin{cases}f(x_n)\to l_1\\ f(y_n)\to l_2\end{cases}$ و $l_1\neq l_2$ آنگاه طبق قضیه‌ی ص ۱۴ جهت (ب)، حکم مسئله حاصل می‌شود.

برای اینکار دو دنباله‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ را به صورت $\{x_n=\frac{1}{n\pi}\}$ و $\{y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\}$ در نظر می‌گیریم.

در این صورت:
$$\begin{cases}x_n=\frac{1}{n\pi}\xrightarrow{n\to\infty}0=c\\ y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\xrightarrow{n\to\infty}0=c\end{cases}$$
ولی:

$$\begin{cases}f(x_n)=\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)=\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right)=\sin(n\pi)=0\xrightarrow{n\to\infty}0=l_1\\ f(y_n)=\sin\left(\frac{1}{y_n}\right)=\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})}}\right)=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\xrightarrow{n\to\infty}1=l_2\end{cases}$$

و $l_1=0\neq 1=l_2$. لذا طبق قضیه ص ۱۴ (ب)، $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ در $\mathbb{R}$ موجود نیست.

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ -x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در هیچ عدد حقیقی غیرصفری، حد ندارد.

حل) فرض کنید $c\neq 0$ عدد حقیقی غیرصفر دلخواهی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم تابع f در $c\neq 0$ حد ندارد. برای این کار، دو دنباله‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

دنباله‌ی $\{x_n\}$ از اعداد گویا ($x_n\in\mathbb{Q}$) که به عدد c همگراست (توجه: طبق قضیه‌ای از فصل اول، انتخاب چنین دنباله‌ای امکان‌پذیر است)

دنباله‌ی $\{y_n\}$ از اعداد گنگ ($y_n\in\mathbb{Q}^c$ یعنی $y_n\notin\mathbb{Q}$) که به c همگراست (توجه: طبق قضیه‌ای، انتخاب چنین دنباله‌ای نیز امکان‌پذیر است)

پس تا اینجا داریم

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} c & (1) \quad x_n\in\mathbb{Q} \\ y_n \xrightarrow{n\to\infty} c & (2) \quad y_n\in\mathbb{Q}^c,\ y_n\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

ولی:

$$\begin{cases} f(x_n) \overset{x_n\in\mathbb{Q}}{=\!=} x_n \xrightarrow[\text{از } (1)]{n\to\infty} c = l_1 \\ f(y_n) \overset{y_n\notin\mathbb{Q}}{=\!=} -y_n \xrightarrow[\text{از } (2)]{n\to\infty} -c = l_2 \end{cases} \Rightarrow l_1 = c \neq -c = l_2$$

چون $c\neq 0$

پس f در هیچ عدد حقیقی غیرصفر c، حد ندارد.

با استفاده از قضیه‌ی ص ۱۴ (الف) و قضایای حد دنباله‌ای در فصل ۲، می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد.

*** قضیه:** فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطه‌ی c است و f و g تابع‌هایی باشند که روی I بجز احتمالاً در c تعریف شده‌اند و K عددی ثابت باشد. فرض کنید حدهای $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ وجود داشته باشند. در این صورت:

الف) $f+g$ در c حد دارد و $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$.

ب) $f-g$ در c حد دارد و $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$.

ج) Kf در c حد دارد و $\lim_{x\to c}(Kf(x))=K\lim_{x\to c}f(x)$

د) fg در c حد دارد و $\lim_{x\to c}(f(x)g(x))=\lim_{x\to c}f(x)\times\lim_{x\to c}g(x)$

هـ) اگر $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$، $\frac{f}{g}$ در c حد دارد و $\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$.

*** نتیجه:** فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطه‌ی c است و f تابعی باشد که روی I بجز احتمالاً در c تعریف شده است. اگر برای هر x در $I-\{c\}$، $m\leq f(x)\leq M$ و $\lim_{x\to c}f(x)=l$، آنگاه $m\leq l\leq M$.

اثبات) با استفاده از قضیه‌ی ص ۱۴ قسمت (الف) و نیز قضیه‌ی اول ص ۵، حکم به سادگی بدست می‌آید. ▨

* قضیه (قضیه فشردگی) [فشار] برای تابع‌ها: فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطه c است و f و g و h تابع‌هایی باشند که روی I به‌جز احتمالاً در c تعریف شده‌اند. فرض کنید برای هر x در $I-\{c\}$، $g(x)\le f(x)\le h(x)$. اگر $\lim_{x\to c} g(x) = l = \lim_{x\to c} h(x)$، آنگاه f در c حد دارد و $\lim_{x\to c} f(x)=l$.

انتخاب: ص ۱۱۹ کتاب راسل گوردون (تذکر: قضیه ۲.۳ در کتاب گوردون همان قضیه ص ۱۴ جزوه است)

مثال‌ها: نشان دهید وقتی $x>0$، $\lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}}=0$.

حل) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ و $c=0$. چون $x\to 0$ پس x خیلی نزدیک صفر است پس $0<x<1$. از طرفی چون برای $0<x<1$ داریم $x < x^{\frac{1}{2}} < 1$ پس با ضرب طرفین در x (توجه: $x>0$) داریم

$$\underbrace{x^2}_{g(x)} < \underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{f(x)} < \underbrace{x}_{h(x)}$$

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ ، $\lim_{x\to 0} x = 0$

پس چون $\lim_{x\to 0} x = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$، بنابراین طبق قضیه نتیجه می‌شود $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}} = 0$.

مثال‌ها: نشان دهید $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})=0$.

حل) چون

$$-1\le \sin(\tfrac{1}{x}) \le 1 \xRightarrow{\text{طرفین در } x \text{ ضرب}} \underbrace{-|x|}_{g(x)} \le \underbrace{x\sin(\tfrac{1}{x})}_{f(x)} \le \underbrace{|x|}_{h(x)}.$$

تذکر: چون معلوم نیست x مثبت است یا منفی، اگر داخل قدرمطلق قرار دهیم همواره درست است! (نامساوی جدید)

حال چون $\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim_{x\to 0}(|x|)$ پس طبق قضیه فشار، $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$.

تعریف: تعاریف حد راست و حد چپ یک تابع، حد دوطرفه یک تابع در یک نقطه، حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت یک تابع از صفحات ۱۲۰ تا ۱۲۲ کتاب راسل گوردون.

* قضیه: فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطه c است و f تابعی باشد که روی I به‌جز احتمالاً در c تعریف شده است. تابع f وقتی و فقط وقتی در c حد دارد که حدهای یک‌طرفه f در c وجود داشته باشند و با هم برابر باشند.

یعنی حدهای چپ و راست f در c

$|g(x) - T| < \frac{\varepsilon}{2}$. فرض کنید $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. به‌ازای هر x در I که $0 < |x - c| < \delta$،

$$\left|(f(x)+g(x)) - (S+T)\right| \le |f(x) - S| + |g(x) - T| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

این مطلب نشان می‌دهد که $f + g$ در c حد دارد.

برای اثبات حکم مربوط به نسبت، فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $I\setminus\{c\}$ باشد که به c همگراست. بنابر قضیهٔ ۲.۳، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ به S همگراست و $\{g(x_n)\}$ به T. چون $T \neq 0$، از قسمت (د) قضیهٔ ۷.۲ نتیجه می‌شود که $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ به $\frac{S}{T}$ همگراست. باز هم بنابر قضیهٔ ۲.۳ (توجه کنید که از هر قسمت حکم دو شرطی قضیهٔ ۲.۳ استفاده کرده‌ایم)، حد تابع $\frac{f}{g}$ در c برابر با $\frac{S}{T}$ است. این موضوع اثبات را کامل می‌کند. ■

در دو قضیهٔ بعد رابطهٔ میان حد تابع و نابرابری‌های مربوط به تابع را آورده‌ایم. این حکم‌ها شبیه قضیه‌های ۸.۲ و ۹.۲اند، که ویژگی‌های مشابهی را در مورد دنباله‌ها در بردارند. اثبات حکم اول بماند برای تمرین.

قضیهٔ ۴.۳ فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطهٔ c است و f تابعی باشد که روی I بجز احتمالاً در c تعریف شده است. اگر به‌ازای هر x در $I\setminus\{c\}$، $m \le f(x) \le M$ و $\lim_{x\to c} f(x) = L$، آن‌وقت $m \le L \le M$. ■

قضیهٔ ۵.۳ قضیهٔ فشردگی برای تابع‌ها فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطهٔ c است و g، f و h تابع‌هایی باشند که روی I بجز احتمالاً در c تعریف شده‌اند. فرض کنید به‌ازای هر x در $I\setminus\{c\}$، $g(x) \le f(x) \le h(x)$. اگر $\lim_{x\to c} g(x) = L = \lim_{x\to c} h(x)$، آن‌وقت f در c حد دارد و $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

اثبات. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $I\setminus\{c\}$ باشد که به c همگراست. بنابر قضیهٔ ۲.۳، هر یک از دنباله‌های $\{g(x_n)\}$ و $\{h(x_n)\}$ به L همگراست. چون به‌ازای هر n، $g(x_n) \le f(x_n) \le h(x_n)$، بنابر قضیهٔ فشردگی برای دنباله‌ها، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ به L همگراست. از قضیهٔ ۲.۳ نتیجه می‌شود $\lim_{x\to c} f(x) = L$. ■

در تعریف حد تابع f در c لازم است که تابع f در دو طرف c تعریف شده باشد، اما ممکن است گاهی لازم است تابع‌هایی را بررسی کنیم که در هر دو طرف c تعریف نشده‌اند. مثلاً عبارت $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ معنی ندارد، زیرا $\sqrt{x}$ به‌ازای همهٔ مقدارهای x در بازه‌ای که شامل 0 است تعریف نشده است. در این مورد، فقط مقدارهایی از x را درنظر می‌گیریم که در $0 < x < \delta$ صدق می‌کنند.

به‌عنوان دومین مثال، تابع g را به شکل

$$g(x) = \begin{cases} x^{۲} & x < ۲ \\ x + ۲ & x \geq ۲ \end{cases}$$

تعریف کنید. برای بررسی اینکه g در ۲ حد دارد یا خیر، باید حالت‌های $x < ۲$ و $x > ۲$ را جداگانه درنظر بگیریم، زیرا g روی این دو بازه یکجور تعریف نشده است. در حالت کلی، به جای اینکه اصرار داشته باشیم نابرابری $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای همهٔ مقدارهای x که در $۰ < |x - c| < \delta$ صدق می‌کنند برقرار باشد، می‌توانیم فقط بر مقدارهای x در بازهٔ $(c - \delta, c)$ یا در بازهٔ $(c, c + \delta)$ تمرکز کنیم. وضعیت‌هایی این‌چنینی ما را به تعریف **حد یک‌طرفه** می‌رسانند.

تعریف ۶.۳ فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که یا شامل c است یا c یکی از دو سر آن است و f تابعی باشد که روی I بجز احتمالاً در c تعریف شده است.

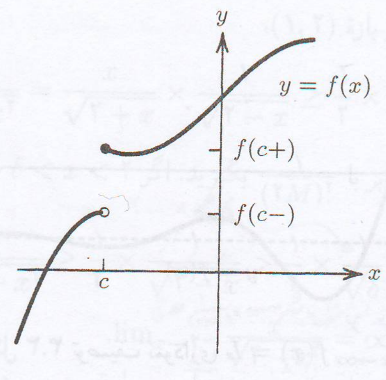
الف) اگر $c \in I$ یا اگر c انتهای سمت چپ I باشد، آن‌وقت **حد راست** f در c برابر با L است، به شرطی که به‌ازای هر عدد مثبت مانند ε عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد
$\forall x: c < x < c + \delta$
که به‌ازای هر x در $(c, c + \delta)$، $|f(x) - L| < \varepsilon$. اگر حد راست f در c برابر با L باشد، می‌نویسیم $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$، و هر ازگاهی از نمادگذاری $L = f(c+)$ استفاده می‌کنیم.

ب) اگر $c \in I$ یا اگر c انتهای سمت راست I باشد، آن‌وقت **حد چپ** f در c برابر با L است، به شرطی که به‌ازای هر عدد مثبت مانند ε عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد که به‌ازای
$\forall x: c - \delta < x < c$
هر x در $(c - \delta, c)$، $|f(x) - L| < \varepsilon$. اگر حد چپ f در c برابر با L باشد، می‌نویسیم $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$، و هر ازگاهی از نمادگذاری $L = f(c-)$ استفاده می‌کنیم.

در این وضعیت، حد معمولی را **حد دوطرفه** می‌نامند. قطعاً ممکن است که حتی وقتی حد دوطرفه وجود ندارد، هرکدام از حدهای یک‌طرفه وجود داشته باشد؛ مثالی نموداری از این دست در شکل ۲.۳ نشان داده شده است. با این حال، رابطه‌ای ساده میان حدهای یک‌طرفه و حد دوطرفه را در قضیه بعد آورده‌ایم؛ اثبات این حکم بماند برای تمرین.

(مهم)

قضیهٔ ۷.۳ فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطهٔ c است و f تابعی باشد که روی I بجز احتمالاً در c تعریف شده است. تابع f وقتی و فقط وقتی در c حد دارد که حدهای یک‌طرفه هر دو در c وجود داشته باشند و برابر باشند. ■



شکل ۲.۳ حدهای یک‌طرفه در c وجود دارند اما حد دوطرفه در c وجود ندارد.

برای روشن شدن این قضیه، تابع‌های f و g را که به شکل

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x < ۲ \\ ۶ & x = ۲ \\ x + ۲ & x > ۲ \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^۲ & x < ۲ \\ ۵ & x = ۲ \\ x + ۸ & x > ۲ \end{cases}$$

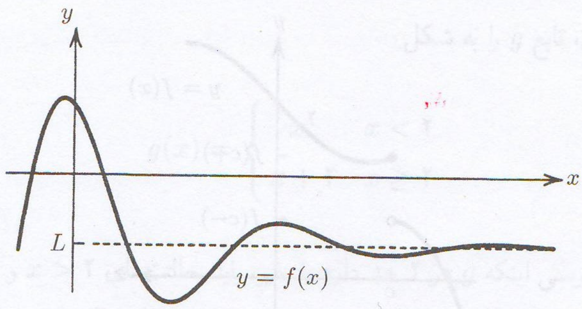
تعریف شده‌اند درنظر بگیرید. در مورد تابع f،

$$\lim_{x \to ۲-} f(x) = \lim_{x \to ۲-} x^۲ = ۴, \qquad \lim_{x \to ۲+} f(x) = \lim_{x \to ۲+} (x + ۲) = ۴$$

درنتیجه $\lim_{x \to ۲} f(x)$ وجود دارد و مقدارش ۴ است. چون $g(۲-) = ۴$ و $g(۲+) = ۱۰$، تابع g در ۲ حد ندارد. توجه کنید که این مثال‌ها بار دیگر روشن می‌کنند که مقدار تابع در c هیچ نقشی در محاسبهٔ حد در c ندارد.

فرض کنید f تابعی باشد که روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ تعریف شده است. معنی اینکه «f در هر نقطهٔ $[a, b]$ حد دارد» این است که f در هر نقطهٔ (a, b) حد دوطرفه دارد، در a حد راست دارد و در b حد چپ. معنی اینکه «f در هر نقطهٔ $[a, b]$ حد یک‌طرفه دارد» این است که f در هر نقطهٔ (a, b) هم حد چپ دارد هم حد راست، در a حد راست دارد و در b حد چپ. مهم است که به یاد داشته باشید تابع‌هایی وجود دارند که حد یک‌طرفه ندارند؛ تابع $\sin \frac{۱}{x}$، که در ۰ حدهای یک‌طرفه ندارد، یکی از مثال‌های متعدد از این دست است (تمرین‌ها را ببینید).

انواع دیگری هم از مفهوم حد وجود دارد؛ دو تا از اینها را در تعریف ۸.۳ گنجانده‌ایم. در تمرین‌ها از خواننده خواسته‌ایم که تعریف صورت‌های دیگر را بیاورد.



شکل ۳.۳ توصیف نموداری $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

تعریف ۸.۳

الف) فرض کنید a عددی حقیقی باشد و f تابعی که روی بازهٔ (a,∞) تعریف شده است. حد تابع f وقتی که x به ∞ می‌رود برابر با L است، به شرطی که به‌ازای هر عدد مثبت مانند ε، عددی مانند b وجود داشته باشد که $b > a$ و به‌ازای هر x که $x \geq b$، $|f(x) - L| < \varepsilon$. در این صورت، می‌نویسیم $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

ب) فرض کنید I بازه‌ای باز باشد که شامل نقطهٔ c است و f تابعی باشد که روی I بجز احتمالاً در نقطهٔ c تعریف شده است. می‌نویسیم $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$، به شرطی که به‌ازای هر عدد مثبت مانند M عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد که به‌ازای هر x در I که $0 < |x - c| < \delta$، $f(x) > M$.

مفاهیم حدی که در تعریف ۸.۳ آمده‌اند تعبیرهای نموداری ساده‌ای دارند. اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$، آن‌وقت نمودار f به‌ازای مقدارهای بزرگ x شبیه خط افقی $y = L$ است (شکل ۳.۳ را ببینید). اگر $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$، آن‌وقت نمودار f در c «سر به آسمان برمی‌دارد»، یعنی نمودار مورد نظر به‌ازای xهای نزدیک c به‌طور عمودی بالا و بالاتر می‌رود. نمودار تابع f که با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ تعریف شده است در 0 این ویژگی را دارد. به‌عنوان نکتهٔ آخر، توجه کنید که $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. (تعریف این نوع از حدها شبیه قسمت (ب) تعزیف ۸.۳ است؛ تعریف دقیق اینها را خودتان پیدا کنید.) در نتیجه $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$، حتی بر مبنای قسمت (ب) تعریف ۸.۳، وجود ندارد.

چون ∞ عدد نیست، وقتی که $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$، تابع f در c حد ندارد. این نمادگذاری یعنی اینکه مقدارهای خروجی f به‌ازای مقدارهایی از x که برابر با c نیستند و در بازه‌ای شامل c قرار دارند خیلی بزرگ‌اند. به‌عنوان مثال، ثابت می‌کنیم

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \infty$$

توجه کنید که به‌ازای xهای در بازهٔ $(۱,۲)$،

$$\frac{x}{\sqrt{۴-x^۲}} = \frac{x}{\sqrt{۲+x}} \times \frac{۱}{\sqrt{۲-x}} \geq \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲-x}}$$

فرض کنید $M > ۱$ و δ را برابر با $\frac{۱}{(۲M)^۲}$ بگیرید. اگر $۲-\delta < x < ۲$، آن‌وقت $x \in (۱,۲)$ و

$$\frac{x}{\sqrt{۴-x^۲}} \geq \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲-x}} > \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{\delta}} = M$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\lim_{x\to ۲^-} \frac{x}{\sqrt{۴-x^۲}} = \infty$.

خیلی از قضیه‌های این فصل در مورد حدهای دوطرفه، در مورد حدهای یک‌طرفه و نیز انواع دیگر مفهوم حد درست می‌مانند. این حکم‌ها را در اینجا ذکر نمی‌کنیم، اما اگر بعداً احتیاج شد از آنها استفاده می‌کنیم. در تمرین ۳۹ انتهای این بخش تعدادی از این حکم‌ها را آورده‌ایم.

تمرین

۱. اگر شرط مثبت بودن δ را در تعریف حد برداریم از نظر منطق چه وضعیتی پیش می‌آید؟

۲. ثابت کنید که حد تابع یکتاست.

۳. فرض کنید f تابعی باشد که این‌طور تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۰ \\ ۱۰^{-۹} & x > ۰ \end{cases}$$

و ادعای $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۰$ را درنظر بگیرید. به‌ازای چه مقدارهایی از عدد مثبت ε می‌توان عددی مثبت مانند δ طوری پیدا کرد که در تعریف حد صدق کند؟ آیا این تابع در ۰ حد دارد؟

۴. با استفاده از تعریف حد هر یک از حکم‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲}(۵x-۱۱) = -۱$

ب) $\lim_{x\to ۱}(x^۲+x-۱) = ۱$

ج) $\lim_{x\to -۲}(x-۳x^۲) = -۱۴$

د) $\lim_{x\to ۴}\sqrt{x} = ۲$

ه) $\lim_{x\to -۲} x^۳ = -۸$

و) $\lim_{x\to ۱}(۴/(۳x+۲)) = ۴/۵$

* تابع‌های پیوسته:

تعریف (تابع پیوسته): فرض کنید I یک بازه باشد، $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع و $c \in I$. می‌گوییم تابع f در نقطهٔ c پیوسته است هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists \delta > 0 ,\ \forall x \in I ;\ |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon .$$

با توجه به تعریف حد یک تابع در بخش قبلی، این یعنی $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

لازم به ذکر است تابع f روی I پیوسته است هرگاه f در هر نقطهٔ I، پیوسته باشد.

از تعریف بالا، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

*** نتیجه ۱ (قضیه):** فرض کنید I یک بازه باشد، $f: I \to \mathbb{R}$ و $c \in I$. حکم‌های زیر معادل هستند:

(الف) تابع f در c پیوسته است.

(ب) تابع f در c حد دارد و $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ (* توجه: اگر c نقطهٔ انتهایی I باشد، از حد یک‌طرفهٔ مناسب آن استفاده می‌شود.)

(ج) برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در I که $x_n \longrightarrow c$، آنگاه $f(x_n) \longrightarrow f(c)$.

*** نتیجه ۲ (معیار ناپیوستگی):** f در $c \in I$ ناپیوسته است اگر و فقط اگر دنباله‌ای در I مانند $\{x_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که $x_n \longrightarrow c$ ولی $f(x_n) \not\longrightarrow f(c)$.

از تعریف پیوستگی و نتیجهٔ ۱ بالا، قضیه زیر به دست می‌آید.

*** قضیه:** فرض کنید f و g تابع‌هایی باشند که روی بازهٔ I تعریف شده‌اند، $c \in I$ و k عددی ثابت باشد. اگر f و g در c پیوسته باشند، آنگاه تابع‌های $f+g$، $f-g$، kf و fg در c پیوسته‌اند. اگر $g(c) \neq 0$، آنگاه $\frac{f}{g}$ در c پیوسته است.

قضیه بالا را می‌توان از پیوستگی در یک نقطه به پیوستگی روی بازه، تعمیم داد.

*** قضیه (پیوستگی تابع مرکب):** فرض کنید I یک بازه، $g: I \to \mathbb{R}$، $c \in I$ و f تابعی باشد که روی بازهٔ J تعریف شده است و $g(I) \subseteq J$. اگر g در c و f در $g(c)$ پیوسته باشند آنگاه $f \circ g$ در c پیوسته است.
(همچنین اگر g روی I و f روی J پیوسته باشند آنگاه $f \circ g$ روی I پیوسته است.)

اثبات: با توجه به فرض‌های قضیه، تابع $f \circ g$ روی بازه I تعریف شده است. حال فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در I باشد و $x_n \to c$. ثابت می‌کنیم $(f \circ g)(x_n) \longrightarrow (f \circ g)(c)$ تا طبق نتیجه ۱، از معادل بودن (ج) و (الف)، پیوستگی $f \circ g$ در c حاصل شود. برای این کار، داریم:

اولاً: چون $x_n \longrightarrow c \xRightarrow[\text{پیوسته}]{g \text{ در } c} g(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} g(c)$ ①

ثانیاً: چون از ① $g(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} g(c) \xRightarrow[f \text{ در } g(c)]{\text{از پیوستگی}} f(g(x_n)) \xrightarrow{n \to \infty} f(g(c)) \Longrightarrow (f \circ g)(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} (f \circ g)(c)$

در این ترتیب از نتیجه ۱ بالا، نتیجه می‌گیریم $f \circ g$ در c پیوسته است. ▨

*** نتیجه:** اگر I یک بازه و $f: I \to \mathbb{R}$ و f روی I پیوسته باشد آنگاه $|f|$ نیز روی I پیوسته است. همچنین اگر برای هر $x \in I$، $f(x) \geq 0$، آنگاه $\sqrt{f}$ نیز روی I پیوسته است.

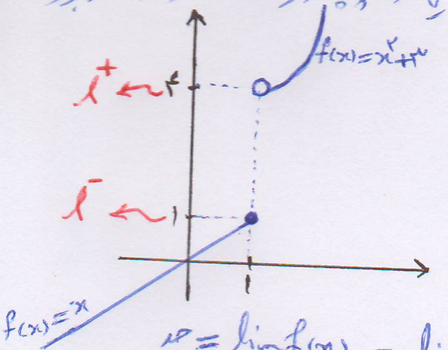
* نتیجه: (الف) یک چندجمله‌ای در هر عدد حقیقی، پیوسته است.

(ب) یک تابع گویا (یعنی به شکل $f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$) ، در هر عدد حقیقی به جز ریشه‌های مخرج، پیوسته است.

(ج) هر شش تابع مثلثاتی در هر عدد حقیقی که در آن تعریف شده‌اند، پیوسته‌اند.

* تعریف (ناپیوستگی جهشی و ناپیوستگی رفع شدنی): فرض کنید I بازه‌ای باز باشد، $c\in I$ و f تابعی باشد که روی I به جز احتمالاً در نقطه c تعریف شده است.

(الف) تابع f در c ناپیوستگی جهشی دارد هرگاه حدهای یک‌طرفه f در c (یعنی حدهای چپ و راست f در c) وجود داشته باشند اما برابر نباشند.



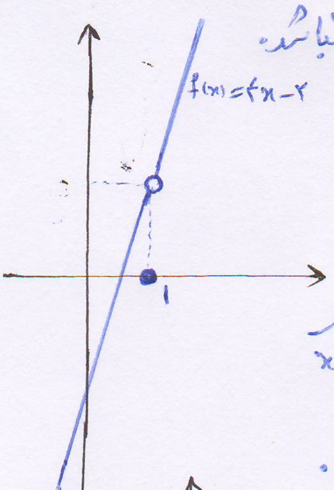
مثال: به عنوان مثال، تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\le 1\\ x^2+3 & x>1\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

تابع f در $x=1$ ناپیوستگی جهشی دارد، زیرا:

$\underset{x=1}{\text{حد چپ در}}=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x)=1=l^-$ و $\underset{x=1}{\text{حد راست در}}=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+3)=4=l^+$

و ملاحظه می‌شود که $l^-=1\neq l^+=4$.

(ب) تابع f در c ناپیوستگی رفع شدنی دارد هرگاه $\lim_{x\to c}f(x)$ ($l=$ فرض) وجود داشته باشد (یعنی حدهای چپ و راست f در c موجود و برابر باشند) اما $f(c)$ تعریف شده نباشد یا مقدارش برابر l نباشد.



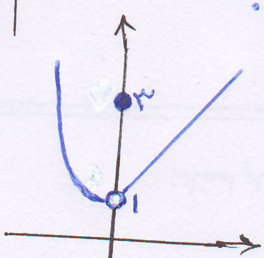
مثال: به عنوان مثال، تابع $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x\neq1\\ 0 & x=1\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

تابع f در $x=1$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد، زیرا:

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(4x-2)=2$ و $f(1)=0$

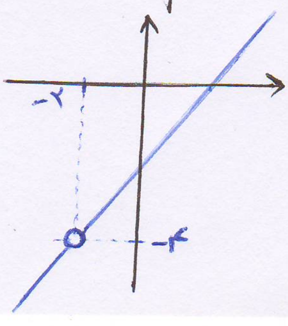
l موجود است

ملاحظه می‌شود که $\lim_{x\to1}f(x)$ موجود و برابر ۲ است ولی $f(1)=0\neq\lim_{x\to1}f(x)=2$.



مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ 3 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ نیز در $x=0$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

زیرا: $l^-=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0}(x^2+1)=1$ و $l^+=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0}(x+1)=1 \Rightarrow l^-=l^+=1\neq f(0)=3$



مثال: تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ در $x=-2$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

زیرا: اولاً: f در $x=-2$ تعریف شده نیست

ثانیاً: $\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4$ موجود است.

اکنون به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال: فرض کنید f برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 3$ به صورت $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x-3}$ تعریف شده باشد.
آیا می‌توان f را طوری تعریف کرد که f در این نقطه پیوسته شود؟

حل) به وضوح، f در $x=3$ تعریف شده نیست. از طرفی،

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+4)=7$$

بنابراین، چون شرط پیوستگی f در $x=3$ آن است که $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$ پس کافی است f را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-12}{x-3} & x\neq 3\\ 7 & x=3\end{cases}$$

مثال: مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}$ را مشخص کنید. آیا ناپیوستگی در این نقاط رفع‌شدنی است؟

حل) نقاط ناپیوستگی f عبارتند از ریشه‌های مخرج (چون f تابعی گویا است، یعنی صورت و مخرج آن چندجمله‌ای هستند)
یعنی:

$$\text{مجموعه نقاط ناپیوستگی } f=\{-1,1\}$$

f در $x=\pm 1$ تعریف شده نیست.

از طرفی،

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-2}{x+1}=-\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+2 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2 & x^2-2x-2 \\ \hline -2x^2+2 & \\ +2x^2-2x & \\ \hline -2x+2 & \\ 2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

مجموع ضرایب $=0$ ← پس عامل $x-1$ دارد

این حد موجود است، پس f در $x=1$ ناپیوستگی رفع‌شدنی دارد.

همچنین در

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}=\frac{-2}{0}=\text{بی‌نهایت}$$

← این حد موجود نیست

موجود نیست $\Longrightarrow$ f در $x=-1$ ناپیوستگی رفع‌شدنی ندارد (ناپیوستگی از نوع جهشی هم نیست!)

ملاحظه می‌شود f فقط در $x=1$ ناپیوستگی رفع‌شدنی دارد. یعنی اگر f در $x=1$ به صورت $f(1)=-\frac{3}{2}$ تعریف شود آنگاه f در $x=1$ پیوسته می‌شود.

مثال: نقاط پیوستگی توابع زیر را تعیین کنید:

(۱) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\neq 0$ → حل)

در صورت باید $1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$ (۲)

و در مخرج باید $x\neq 0$ (۱)

$\Longrightarrow$ جواب $=$ اشتراک (۱) و (۲) $=[-1,1]-\{0\}$

(۲) $g(x)=\sin\left(\sqrt{x^2-x-6}\right)$

حل) باید $x^2-x-6\geq 0 \to (x-3)(x+2)\geq 0$

x		-2		3	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Longrightarrow$ مجموعه نقاط پیوستگی f $=(-\infty,-2]\cup[3,\infty)$

مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases} x & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ -x & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد}\end{cases}$ فقط در $x=0$ پیوسته است.

حل) (الف) ابتدا نشان می‌دهیم f در هر $c\neq 0$ ناپیوسته است. سپس (ب) ثابت می‌کنیم در $c=0$ پیوسته است.

(الف) فرض کنید $c\neq 0$ عدد حقیقی دلخواه غیرصفری باشد. طبق قضیه چگالی (در فصل ۱)، دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{x_n\}$ و نیز دنباله‌ای از اعداد گنگ مانند $\{y_n\}$ می‌توان یافت که $x_n \to c$ (1) و $y_n \to c$ (2). بنابراین:

$$A=\begin{cases} f(x_n) \underset{\text{گویا}}{=} x_n \xrightarrow[\text{از } 1]{n\to\infty} c = l_1 \\ f(y_n) \underset{\text{گنگ}}{=} -y_n \xrightarrow[\text{از } 2]{n\to\infty} -c = l_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{پس } c\neq -c]{\text{چون } c\neq 0} l_1 \neq l_2 \Longrightarrow \text{حد ندارد } f \text{ در } c\neq 0$$

پس f در هر $c\neq 0$ ناپیوسته است.

(ب) اکنون اثبات پیوستگی f در $c=0$ (با ابزار ε و δ). برای این کار کافی است ثابت کنیم

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x:\ \underbrace{|x-0|<\delta}_{(3)} \Longrightarrow |f(x)-\overset{=0}{f(0)}|<\varepsilon$$

یعنی

$$|f(x)-0|=|f(x)|=|x| \text{ یا } |-x| \overset{\text{در هر صورت}}{=} |x|<\delta<\varepsilon \ \checkmark$$

(از 3) البته اگر δ به گونه‌ای اختیار شود که $\delta<\varepsilon$.

از (الف) و (ب) در مجموع نتیجه می‌شود f فقط در $x=0$ پیوسته است.

* توابع پیوسته بر بازه‌ها:

*تعریف: (تابع کراندار) تابع $f:A\to\mathbb{R}$ را بر A کراندار می‌گوییم هرگاه عدد ثابتی مانند $M>0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in A$، $|f(x)|\leq M$.

به عبارت دیگر، یک تابع کراندار است اگر بردش، مجموعه‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ باشد.

*قضیه (قضیه کرانداری): فرض کنید $I=[a,b]$ بازه‌ای بسته و کراندار و $f:I\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر I باشد. در این صورت f بر I کراندار است.

اثبات) برای اثبات، عکس نقیض آن را اثبات می‌کنیم. یعنی اثبات می‌کنیم اگر f بر $[a,b]$ کراندار نباشد (بی‌کران باشد) آنگاه f بر $[a,b]$ پیوسته نیست (توجه: البته این نوع برهان به نوعی برهان خلف هم است. زیرا از فرض کراندار نبودن f (یعنی فرض خلف) به پیوسته نبودن f می‌رسیم که تناقض با فرض پیوستگی f روی $[a,b]$ دارد).

پس فرض می‌کنیم f روی $[a,b]$ کراندار نیست. بنابراین برای هر عدد طبیعی مانند n، x_nای در $[a,b]$ وجود دارد که $|f(x_n)|>n$ (1).
به این ترتیب به دنباله‌ای از عناصر $[a,b]$ مانند $\{x_n\}$ دست می‌یابیم. چون $[a,b]$ کراندار است پس دنباله $\{x_n\}$ نیز کراندار است و لذا طبق قضیه بولتسانو-وایرشتراس (از فصل ۲)، دنباله $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{x_{n_k}\}$ دارد.

فرض کنیم زیردنباله‌ی $\{x_{n_k}\}$ به عددی مانند z (که $z\in[a,b]$) همگراست. بنابراین حاصل می‌شود

زیرا: چون $x_{n_k}\in[a,b]$ پس طبق قضیه (فصل ۲)، در صورت همگرایی حد به عضوی در $[a,b]$ همگراست.

ولی $x_{n_k}\longrightarrow z$ (۲) و $|f(x_{n_k})|\geq n_k$ (طبق ۱) و این یعنی وقتی $k\to\infty$ آنگاه $|f(x_{n_k})|\to\infty$ و لذا $f(x_{n_k})$ کراندار نیست و بنابراین، $f(x_{n_k})$ به عدد $f(z)$ همگرا نیست، یعنی $f(x_{n_k})\not\to f(z)$. (۳)

از (۲) و (۳) و قضیه اول (نتیجه ۱) ص ۱۹، f در z پیوسته نیست و چون $z\in[a,b]$، پس f بر $[a,b]$ پیوسته نیست. ▨

* **تعریف** (ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق): فرض کنیم $A\subseteq\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$. می‌گوییم f بر A دارای ماکسیمم مطلق است هرگاه نقطه‌ای مانند $x^*\in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in A$، $f(x)\leq f(x^*)$.

همچنین می‌گوییم f بر A دارای مینیمم مطلق است هرگاه نقطه‌ای مانند $x_*\in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in A$، $f(x_*)\leq f(x)$.

هرگاه x^* و x_* موجود باشند می‌گوییم x^* نقطه‌ی ماکسیمم مطلق f روی A، و x_* نقطه‌ی مینیمم مطلق f روی A است.

* **قضیه** (قضیه‌ی ماکسیمم-مینیمم یا قضیه‌ی مقدار اکسترمم): فرض کنید $[a,b]$ بازه‌ای بسته و کراندار و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت f روی $[a,b]$ ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد، یعنی

$$\exists c,d\in[a,b];\ \forall x\in[a,b]:\ \underbrace{f(c)}_{\text{همان مینیمم مطلق } f \text{ روی } [a,b]}\leq f(x)\leq \underbrace{f(d)}_{\text{همان ماکسیمم مطلق } f \text{ روی } [a,b]}.$$

اثبات) چون f روی $[a,b]$ پیوسته است پس طبق قضیه‌ی کرانداری (قضیه‌ی قبل)، f روی $[a,b]$ کراندار است، یعنی محدوده‌ی $f([a,b])$ در $\mathbb{R}$ کراندار است. پس دارای $\inf$ و $\sup$ است. فرض کنیم $\alpha=\inf(f([a,b]))$ و $\beta=\sup(f([a,b]))$. می‌دانیم برای هر $x\in[a,b]$، $\alpha\leq f(x)\leq\beta$.

ثابت می‌کنیم عددی مانند $d\in[a,b]$ وجود دارد که $f(d)=\beta$ (اثبات اینکه عددی مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=\alpha$ به طور مشابه است). برای این کار داریم:

اولاً طبق ویژگی sup: $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists d_n\in[a,b]:\ \beta-\frac{1}{n}<f(d_n)\leq\beta \xrightarrow[\text{از قضیه فشار}]{n\to\infty \text{ وقتی}} f(d_n)\xrightarrow{n\to\infty}\beta$ (۱)

ثانیاً: چون همه‌ی d_nها در $[a,b]$ هستند و $[a,b]$ کراندار، پس دنباله‌ی $\{d_n\}$ کراندار است لذا طبق قضیه‌ی بولتزانو-وایرشتراس، دنباله‌ی $\{d_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{d_{n_k}\}$ دارد. فرض کنیم زیردنباله‌ی $\{d_{n_k}\}$ به $d\in[a,b]$ همگراست. یعنی $d_{n_k}\longrightarrow d$، پس چون f در $[a,b]$ پیوسته است پس f در $d\in[a,b]$ پیوسته است و لذا $f(d_{n_k})\longrightarrow f(d)$. (۲)

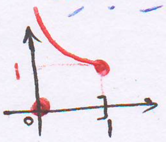
از طرفی طبق (۱)، $f(d_{n_k})\longrightarrow\beta$ (۳). از (۲) و (۳) و یکتایی حد نتیجه می‌شود $f(d)=\beta$. ✓

به طور مشابه می‌توان نشان داد که عددی مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=\alpha$. بدین ترتیب حکم حاصل است. ▨

تذکر: توجه شود که قضیه مقدار اکسترمم ۳ فرض دارد: تابع باید پیوسته باشد، بازه باید بسته باشد، بازه باید کراندار باشد.
اگر یکی از این فرض‌ها برقرار نباشد، آنگاه ممکن است حکم قضیه مقدار اکسترمم برقرار نباشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

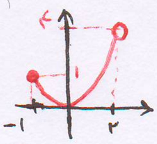
مثال ۱: تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ روی بازه $[0,1]$ پیوسته نیست و ماکسیمم هم ندارد.

f در $x=0$ پیوسته نیست



مثال ۲: تابع $g(x)=x^2$ روی بازه $[-1,2)$ ماکسیمم ندارد.

بازه بسته نیست



مثال ۳: تابع $h(x)=x^3$ روی بازه $[0,\infty)$ ماکسیمم ندارد.

بازه کراندار نیست

* از قضیه مقدار اکسترمم نتیجه می‌شود که تابع پیوسته، بازه را به بازه می‌نگارد (می‌برد). به طور دقیق‌تر، اگر تابعی پیوسته و غیرثابت روی بازه‌ای تعریف شده باشد، آنگاه برد آن یک بازه است. همچنین اگر دامنه‌اش بازه‌ای بسته و کراندار باشد آنگاه از قضیه مقدار اکسترمم نتیجه می‌شود که بردش هم بازه‌ای بسته و کراندار است. نتایج فوق را به صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

* قضیه (نتیجه): فرض کنید I یک بازه باشد و $f: I\to\mathbb{R}$.

(الف) اگر f روی I پیوسته و غیرثابت باشد، آنگاه $f(I)$ یک بازه است.

(ب) اگر f روی I پیوسته و غیرثابت باشد و اگر I بازه‌ای بسته و کراندار باشد، آنگاه $f(I)$ بازه‌ای بسته و کراندار است.

تذکر: در مورد حکم (الف) باید تلقی را گوشزد کنیم: بازه‌های I و $f(I)$ لزوماً از یک نوع نیستند. مثلاً اگر $f(x)=\sin x$ و $I=(-\pi,\pi)$، آنگاه $f(I)=[-1,1]$، و یا مثلاً اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $I=(0,1)$، آنگاه $f(I)=(1,\infty)$.

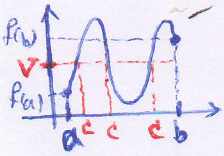
بازه باز — بازه بسته — بازه کراندار — بازه بی‌کران

در ادامه، دومین قضیه مهم این بخش را بیان و اثبات می‌کنیم که به قضیه مقدار میانی معروف است.

* قضیه (قضیه مقدار میانی): فرض کنید تابع $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد. اگر v عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه:

$$\exists c\in(a,b): f(c)=v.$$

تعبیر هندسی:



اثبات) فرض کنیم $\underbrace{f(a)<v}_{①}<f(b)$. (برهان حالت $f(b)<v<f(a)$ به طور مشابه است.)

مجموعه S را به صورت $S=\{x\in[a,b]\mid f(x)<v\}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین

اولاً: $S\neq\phi$ (چون طبق ① ، $a\in S$)

ثانیاً: S از بالا کراندار (چون $S\subseteq[a,b]$ پس b یک کران بالای S است)

طبق اصل کمال، S دارای سوپریمم است. فرض کنیم $c=\sup S$.

برای اثبات حکم، ثابت می‌کنیم $f(c)=v$. برای این کار، فرض کنید $\{c_n\}$ دنباله‌ای در S باشد که به c همگراست یعنی $c_n\longrightarrow c$.

پس:

$$f(c_n)<v \Longrightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(c_n)}_{=f(c)}\leq \lim_{n\to\infty}(v) \Longrightarrow \underbrace{f(c)\leq v}_{②}$$

چون $c_n\in S$ — عددی ثابت — چون $c_n\to c$ و f در c پیوسته

اکنون برای هر n، دنباله‌ی $\{d_n\}$ از عناصر $[a,b]$ را به صورت $d_n = c + \frac{b-c}{n}$ در نظر می‌گیریم. پس:

عددی مثبت و مخالف صفر >0

اولاً: $\forall n: d_n > c \Rightarrow d_n > \sup S \Rightarrow d_n \notin S \Rightarrow \forall n: f(d_n) \not< v \Rightarrow \forall n: f(d_n) \geq v$

ثانیاً: $d_n \xrightarrow{n\to\infty} c \xRightarrow{\text{پیوستگی } f} f(d_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(c) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(d_n) = f(c)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(d_n) \geq \lim_{n\to\infty} v \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(d_n) \geq v$

$f(c) \geq v$ (۳)

بنابراین از (۲) و (۳): $f(c) = v$. ✓

* برای روشن شدن قضیه مقدار میانی، تابع $f(x) = x^3 - 4x - 3$ را در نظر بگیرید. این تابع روی بازه‌ی $[2,3]$ پیوسته است. (a، b)

همچنین $f(2) = -3$ و $f(3) = 12$. طبق قضیه‌ی مقدار میانی، به ازای هر عدد v بین $f(a) = -3$ و $f(b) = 12$، عددی مانند $c \in (2,3)$ وجود دارد که $f(c) = v$. مثلاً: برای $v = 5$، عددی مانند $c \in (2,3)$ وجود دارد که $f(c) = 5$. یعنی معادله‌ی $x^3 - 4x - 3 = 5$ ریشه‌ای مانند $c \in (2,3)$ دارد. یا مثلاً: اگر $v = -\frac{1}{2}$، آنگاه عددی مانند $c \in (2,3)$ وجود دارد که $f(c) = -\frac{1}{2}$. یعنی معادله‌ی $x^3 - 4x - 3 = -\frac{1}{2}$ ریشه‌ای مانند $c \in (2,3)$ دارد.

مثال: ثابت کنید معادله‌ی $4\sin x = x$، جواب مثبت دارد.

حل) برای هر عدد حقیقی x، تابع $f(x) = 4\sin x - x$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 4(1) - \frac{\pi}{2} = 4 - \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad f(\pi) = 4\sin\pi - \pi = 4(0) - \pi = -\pi$$

$a = \frac{\pi}{2}$ ، $b = \pi$

مشاهده می‌شود که روی بازه‌ی $[a,b] = [\frac{\pi}{2}, \pi]$، تابع $f(x) = 4\sin x - x$ پیوسته است و

$f(a) = 4 - \frac{\pi}{2} > 0$ و $f(b) = -\pi < 0$ و چون $v = 0$ بین دو عدد $f(a)$ و $f(b)$ است پس

طبق قضیه مقدار میانی،

$$\exists c \in (a,b) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right): f(c) = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right): 4\sin c - c = 0 \Rightarrow \exists c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right): 4\sin c = c$$

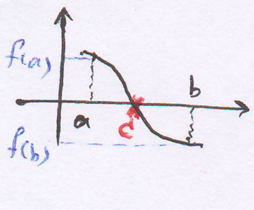
پس $\exists c > 0$

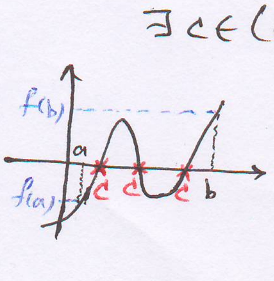
و این یعنی معادله‌ی $4\sin x = x$، جواب مثبت مانند c دارد. ✓

* **نتیجه** (نتیجه‌ای از قضیه مقدار میانی): اگر $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$، آنگاه

$$\exists c \in (a,b): f(c) = 0$$

f در بازه‌ی (a,b) حداقل یک ریشه دارد.





در حل مثال بالا، به نوعی از این نتیجه استفاده کرده‌ایم.

مثال: ثابت کنید معادله $x^3+7x^2-2=0$ حداقل دو ریشه حقیقی دارد.

حل) تابع $f(x)=x^3+7x^2-2$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f(-1)=4>0$$
$$f(0)=-2<0$$
$$f(1)=6>0$$

چون $f(x)$ در هر عدد حقیقی پیوسته، طبق نتیجه قبل، $f(x)$ در بازه $(-1,0)$ حداقل یک ریشه دارد.

چون $f(x)$ در هر عدد حقیقی پیوسته، طبق نتیجه قبل $f(x)$ در بازه $(0,1)$ حداقل یک ریشه دارد.

$f(x)$ در بازه $(-1,1)$ حداقل دو ریشه دارد و لذا این یعنی، معادله $x^3+7x^2-2=0$ حداقل دو ریشه حقیقی دارد. ✓

---

* پیوستگی یکنواخت:

عدد δ هم به ε و هم به c وابسته

فرض کنید تابع f روی بازه I پیوسته باشد، یعنی f در هر نقطه I پیوسته است. پس طبق تعریف پیوستگی، برای هر c در I و هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود دارد که:

$$\forall x\in I,\ |x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon.$$

ملاحظه می‌شود که در پیوستگی، عدد مثبت δ هم به ε و هم به c وابسته است.

حال اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ به گونه‌ای باشد که فقط به ε وابسته باشد و به c وابستگی نداشته باشد، نوع جدیدی از پیوستگی که پیوستگی یکنواخت نام دارد را ایجاد می‌کند که در زیر بیان می‌شود. (تذکر: در تعریف پیوستگی و پیوستگی یکنواخت، به جای بازه I می‌توان هر $A\subseteq\mathbb{R}$ را در نظر گرفت.)

* **تعریف (پیوستگی یکنواخت):** فرض کنید $A\subseteq\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$ تابع باشد. می‌گوییم f روی A پیوسته یکنواخت است هرگاه

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,y\in A,\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

عدد δ فقط به ε وابسته است و قبل از δ، به جز ε هیچ صحبتی از c یا x یا y نیست!

تذکر: پیوستگی یکنواخت روی یک مجموعه است و پیوستگی یکنواخت در یک نقطه، معنی ندارد.

* **نتیجه:** اگر تابع f روی A پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f روی A پیوسته است (یعنی در هر نقطه A، پیوسته است).

از تعریف پیوستگی یکنواخت، قضیه‌های زیر نتیجه می‌شود.

* **قضیه (نتیجه ۱):** فرض کنید $A\subseteq\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) f روی A پیوسته یکنواخت است.

(ب) برای هر دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از عناصر A، اگر $|x_n-y_n|\xrightarrow{n\to\infty}0$ آنگاه $|f(x_n)-f(y_n)|\xrightarrow{n\to\infty}0$.

* **قضیه (نتیجه ۲):** (معیار پیوستگی غیریکنواخت) فرض کنید $A\subseteq\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) f روی A پیوسته یکنواخت نیست.

(ب) $\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x,y\in A,\ |x-y|<\delta,\ |f(x)-f(y)|\not<\varepsilon$ یعنی $\geq\varepsilon$

(ج) دو دنباله از عناصر A مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ وجود دارد به طوری که $|x_n-y_n|\xrightarrow{n\to\infty}0$ ولی $|f(x_n)-f(y_n)|\not\xrightarrow{n\to\infty}0$.

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=4x-7$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

حل) باید نشان دهیم (طبق تعریف)

$$\forall \varepsilon>0 \;,\; \exists \delta>0 \;,\; \forall x,y\in\mathbb{R}: \underbrace{|x-y|<\delta}_{1} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

$$|f(x)-f(y)| = |(4x-7)-(4y-7)| = |4x-4y| = 4|x-y| \overset{\text{از } 1}{<} 4\delta < \varepsilon \checkmark$$

البته اگر δ به گونه‌ای انتخاب شود که $4\delta<\varepsilon$ یعنی $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$ اختیار گردد.

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی بازهٔ $(0/1, 2)$ پیوسته یکنواخت است.

حل) کافی است (طبق تعریف) نشان دهیم

$$\forall \varepsilon>0 \;,\; \exists \delta>0 \;,\; \forall x,y\in(0/1,2): \underbrace{|x-y|<\delta}_{1} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{|y-x|}{|xy|} = \frac{|x-y|}{|x||y|} \overset{\text{از } 1}{<} \frac{\delta}{|x||y|} < 100\delta < \varepsilon \checkmark$$

چون

$$0/1<x<2 \to 0/1<|x|<2 \to \frac{1}{2}<\frac{1}{|x|}<\frac{1}{0/1}$$

$$0/1<y<2 \to 0/1<|y|<2 \to \frac{1}{2}<\frac{1}{|y|}<\frac{1}{0/1}$$

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{|x||y|}<\frac{1}{0/1\times 0/1}$$

$$\frac{1}{|x||y|}<\frac{1}{(\frac{1}{10})^2}=100$$

البته اگر δ به گونه‌ای اختیار شود که $100\delta<\varepsilon$ یعنی $\delta<\frac{\varepsilon}{100}$.

مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی $(0,2)$ پیوسته یکنواخت نیست.

حل) می‌خواهیم از معیار پیوستگی غیریکنواخت (از (ج) به (الف)) استفاده کنیم. برای این کار، دو دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از عناصر بازهٔ $(0,2)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_n=\frac{1}{n} \quad,\quad y_n=\frac{1}{n+1}$$

ملاحظه می‌شود که $|x_n-y_n| = \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$، اما:

$$|f(x_n)-f(y_n)| = \left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{y_n}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = |n-(n+1)| = 1 \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

بنابراین طبق قضیهٔ معیار پیوستگی غیریکنواخت (از (ج) به (الف))، تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی $(0,2)$ پیوسته یکنواخت نیست.

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=x^2$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نیست.

حل) می‌خواهیم از معیار پیوستگی یکنواخت (از (ب) به (الف)) استفاده کنیم. یعنی نشان می‌دهیم

$$\exists \varepsilon>0 \;,\; \forall \delta>0 \;,\; \exists x,y\in\mathbb{R}: |x-y|<\delta \;\;,\;\; |f(x)-f(y)|\not<\varepsilon$$

برای این کار به ازای هر $\delta>0$ دلخواه، با انتخاب $x=\frac{\delta}{2}+\frac{2}{\delta}$ و $y=\frac{2}{\delta}$ داریم $|x-y|=\left|\left(\frac{\delta}{2}+\frac{2}{\delta}\right)-\frac{2}{\delta}\right|=\frac{\delta}{2}<\delta$، اما:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\left(\frac{\delta}{2}+\frac{2}{\delta}\right)^2-\left(\frac{2}{\delta}\right)^2\right| = \left|\frac{\delta^2}{4}+2\left(\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{2}{\delta}\right)+\cancel{\frac{4}{\delta^2}}-\cancel{\frac{4}{\delta^2}}\right| = \left|2+\frac{\delta^2}{4}\right| = 2+\frac{\delta^2}{4} \not< 1$$

می‌توان از ابتدا $\varepsilon>0$ را همین 1 در نظر گرفت.

لذا برای شدهٔ $\varepsilon=1$ در پایان نتیجه می‌شود که $|f(x)-f(y)|\not<\varepsilon$ و لذا طبق معیار پیوستگی یکنواخت (از (ب) به (الف))، $f(x)=x^2$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نیست.

اکنون نتیجه مهمی ارائه می‌کنیم که تضمین می‌کند یک تابع پیوسته روی بازه بسته و کراندار $[a,b]$، پیوسته یکنواخت است.

* **قضیه** (نتیجه ۱): (قضیه پیوستگی یکنواخت) فرض کنیم $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ روی بازه بسته و کراندار $[a,b]$، پیوسته باشد. آنگاه f روی $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است.

اثبات) برهان خلف: فرض کنیم f روی $[a,b]$ پیوسته یکنواخت نیست. بنابراین، طبق قضیه (نتیجه ۲) ص ۲۶،

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x,y\in[a,b]:\ |x-y|<\delta \quad \text{و} \quad |f(x)-f(y)|\underbrace{\not<\varepsilon}_{\text{نقیض}\ \ge\varepsilon}$$

از جمله برای

بنابراین: $\exists\varepsilon>0$ ، $\delta=\frac{1}{n}$ ، $n\in\mathbb{N}$ ، $\exists x_n,y_n\in[a,b]:\ |x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ و $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$

پس: $x_n-y_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ (۱)

پس: $f(x_n)-f(y_n)\not\longrightarrow 0$ (۲)

بنابراین به دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از عناصر $[a,b]$ با ویژگی‌های (۱) و (۲) می‌رسیم. چون $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $[a,b]$ است و $[a,b]$ کراندار است بنابراین دنباله $\{x_n\}$ نیز کراندار است و بنابراین طبق قضیه بولتسانو-وایراشتراس (در فصل ۲)، دنباله $\{x_n\}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{x_{n_k}\}$ است. فرض کنیم زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ به عدد $z\in[a,b]$ همگرا است. (۳)

اکنون داریم

$$y_{n_k}=x_{n_k}+(y_{n_k}-x_{n_k})\xrightarrow[\text{همگرا است به}]{n\to\infty}z+0=z$$

طبق (۳) به z همگرا — طبق (۱) به صفر همگرا

بنابراین $\{y_{n_k}\}$ نیز به z همگرا است. (۴)

پس از (۳) و (۴) و پیوستگی f روی $[a,b]$ نتیجه می‌شود:

بنابراین
$$\begin{cases} f(x_{n_k})\longrightarrow f(z)\\ f(y_{n_k})\longrightarrow f(z)\end{cases}$$

$$f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\xrightarrow[\text{همگرا است به}]{n_k\to\infty}f(z)-f(z)=0$$

و این با (۲) در تناقض است (زیرا از (۲) نتیجه می‌شود $f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\not\longrightarrow 0$). ■

مثال: تابع $f(x)=x^2$ روی بازه $[-1,5]$ پیوسته یکنواخت است.

زیرا: بازه $[-1,5]$ بسته و کراندار و $f(x)=x^2$ روی $[-1,5]$ پیوسته است. پس طبق قضیه بالا، f روی $[-1,5]$ پیوسته یکنواخت است.

مثال: چون $f(x)=\frac{1}{x^2}$ روی بازه $[2,6]$ پیوسته است، پس f روی این بازه، پیوسته یکنواخت است.

* **قضیه** (نتیجه ۲): فرض کنیم $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ روی بازه باز (a,b) پیوسته باشد. در این صورت

f روی (a,b) پیوسته یکنواخت است $\Longleftrightarrow$ f در a حد راست و در b حد چپ داشته باشد.

مثال: تابع $f(x)=\frac{x^2+3x}{2x+1}$ روی بازهٔ (۵و۰) پیوستهٔ یکنواخت است.

زیرا: اولاً: f روی بازهٔ (۵و۰) پیوسته است. ثانیاً:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=\text{موجود}\\ \lim_{x\to 5^-} f(x)=\frac{40}{11}=\text{موجود}\end{array}\right\}$$

پس طبق قضیهٔ قبل (نتیجهٔ ۲)، f روی بازهٔ (۵و۰) پیوستهٔ یکنواخت است.

مثال: تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی بازهٔ (۲و۰) پیوستهٔ یکنواخت نیست.

زیرا، f در $x=0$ حد راست ندارد ($\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$) و بنابراین طبق قضیهٔ قبل (نتیجهٔ ۲)، f روی بازهٔ (۲و۰) پیوستهٔ یکنواخت نیست.

---

* توابع یکنوا و معکوس:

(الف) توابع یکنوا:

یادآوری: اگر $A\subseteq\mathbb{R}$، تابع $f:A\to\mathbb{R}$ را بر A صعودی گوئیم هرگاه $x_1,x_2\in A$ و $x_1\le x_2$ آنگاه $f(x_1)\le f(x_2)$.
تابع f را بر A اکیداً صعودی گوئیم هرگاه $x_1,x_2\in A$ و $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)<f(x_2)$.
به طور مشابه، f را بر A نزولی گوئیم هرگاه $x_1,x_2\in A$ و $x_1\le x_2$ آنگاه $f(x_1)\ge f(x_2)$.
تابع f را بر A اکیداً نزولی گوئیم هرگاه $x_1,x_2\in A$ و $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)>f(x_2)$.
تابعی که بر A صعودی یا نزولی باشد می‌گوئیم بر A یکنواست. اگر f بر A اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوئیم f بر A اکیداً یکنواست.

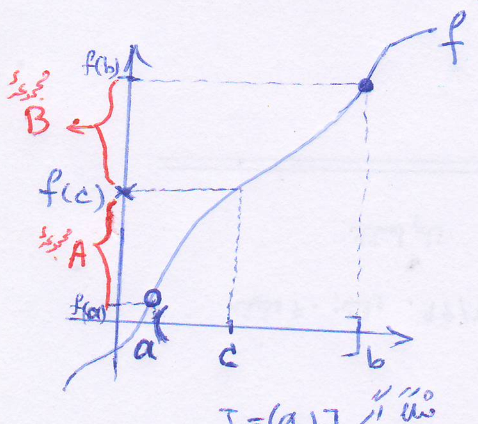
نتیجهٔ زیر معیاری برای پیوستگی یک تابع صعودی (به طور مشابه می‌توان این را برای یک تابع نزولی نیز بیان کرد) مانند f در نقطه‌ای مانند c می‌دهد که c، نقطهٔ انتهایی بازهٔ I که f روی I تعریف شده است، نیست.

*** قضیهٔ ۱:** فرض کنیم $f:I\to\mathbb{R}$ بر بازهٔ $I\subseteq\mathbb{R}$ صعودی باشد. همچنین فرض کنیم $c\in I$ نقطهٔ انتهایی I نباشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

(الف) f در c پیوسته است.

(ب) $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)=\lim_{x\to c^+} f(x)$.

(ج) $\sup\overbrace{\{f(x):\ x\in I,\ x<c\}}^{\text{مجموعهٔ } A}=f(c)=\inf\overbrace{\{f(x):\ x\in I,\ x>c\}}^{\text{مجموعهٔ } B}$



مثلاً اگر $I=(a,b]$

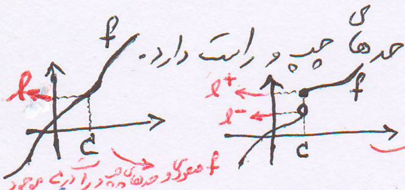
$A=(f(a),f(c))$ ، $B=(f(c),f(b)]$ $\longrightarrow \sup A=f(c)=\inf B$

نتیجهٔ ۲: فرض کنید $f:I\to\mathbb{R}$ بر بازهٔ I یکنوا باشد. اگر $f(I)$ (یعنی بردِ f) بازه باشد، آنگاه f روی I پیوسته است.

(مثلاً: در نمودار (شکل) نتیجهٔ ۱ بالا، $I=(a,b]$ و f بر I صعودی و $f(I)=(f(a),f(b)]$ یک بازه است و مشاهده می‌شود f روی I پیوسته است.)

* قضیه: فرض کنیم $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ بر بازهٔ I یکنوا باشد. در این صورت، مجموعهٔ نقاطی از I که f در آن‌ها ناپیوسته است، یک مجموعهٔ شمارا است (و ناپیوستگی‌های f از نوع جهشی است).

* قضیه: فرض کنیم $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ بر بازهٔ I یکنوا باشد. در این صورت f در هر نقطهٔ I، حدهای چپ و راست دارد.



ب) توابع معکوس:

فرض کنید f تابعی یک به یک و پیوسته روی بازهٔ I باشد. در این صورت f وارون پذیر است (وارون f وجود دارد) که وارونش را با f^{-1} نشان می‌دهیم و طبیعی است که بپرسیم آیا f^{-1} تابعی پیوسته است یا خیر. چون نمودار f^{-1} قرینهٔ نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) است و چون نمودار f پیوسته است و انقطاع ندارد، پس نمودار f^{-1} نیز انقطاع ندارد، ولی این حرف‌ها اثباتی برای پیوسته بودن f^{-1} نیست، اما نشان‌دهنده است از اینکه وارون تابع پیوسته باید پیوسته باشد. در قضیهٔ زیر، این مطلب را اثبات می‌کنیم.

* قضیه (قضیهٔ پیوستگی تابع وارون): فرض کنید I یک بازه و $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ روی I پیوسته و اکیداً یکنوا باشد و برد f بازهٔ J باشد. در این صورت، تابع f^{-1} روی J پیوسته و اکیداً یکنوا است.

قسمت اول حکم ← → قسمت دوم حکم

توجه: $\begin{pmatrix} D_f = R_{f^{-1}} = I \\ R_f = D_{f^{-1}} = J \end{pmatrix}$

اثبات) حالتی را در نظر بگیریم که f روی I اکیداً صعودی است (حالت اکیداً نزولی به صورت مشابه اثبات می‌شود).

(الف) ابتدا ثابت می‌کنیم f^{-1} روی J اکیداً صعودی است (قسمت اول حکم). یعنی ثابت می‌کنیم اگر $u, v \in J$ و $u < v$، آنگاه $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$.

برای این کار، فرض کنید $u, v \in J$ و $\underbrace{u < v}_{①}$. پس از ① و ② نتیجه می‌شود $\underbrace{f(x_1) < f(x_2)}_{④}$ که این به همراه

$J \rightarrow D_{f^{-1}} = R_f$ پس $u, v \in R_f$ پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists x_1, x_2 \in I: \\ \underbrace{\begin{array}{l} u = f(x_1) \\ v = f(x_2) \end{array}}_{②} \begin{array}{l} \Longrightarrow x_1 = f^{-1}(u) \\ \Longrightarrow x_2 = f^{-1}(v) \end{array} \rightarrow ③ \end{array} \right.$$

فرض اکیداً صعودی بودن f روی I نتیجه می‌دهد $x_1 < x_2$ (زیرا در غیر این صورت، $x_2 \le x_1$ و بنابر اکیداً صعودی بودن f آنگاه $f(x_1) \ge f(x_2)$ که با ④ در تناقض است). پس $x_1 < x_2$ و در نتیجه طبق ③، این یعنی $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$. ✓

(ب) اکنون ثابت می‌کنیم f^{-1} روی J پیوسته است (قسمت دوم حکم):

می‌دانیم: $\text{برد } f^{-1} = R_{f^{-1}} = \text{دامنه } f = D_f \Longrightarrow \underbrace{f^{-1}(J)}_{\text{برد } f^{-1}} = \underbrace{I}_{\text{دامنهٔ } f} = \text{یک بازه} \xrightarrow{\text{پس } f^{-1} \text{ یکنوا (طبق الف)}}$

و دامنه f^{-1} یک بازه → J

و برد f^{-1} یک بازه → I

طبق نتیجهٔ ۲ صفحهٔ قبل، f^{-1} روی J پیوسته است. ✓ ▨

فصل ۴

مشتقگیری

قبل از قرن هفدهم، عموماً یک منحنی به عنوان مکان هندسی نقاطی که در برخی شرایط هندسی صدق می‌کنند توصیف می‌شد، و خطوط مماس از طریق ترسیم هندسی بدست می‌آمدند. این دیدگاه با ظهور هندسهٔ تحلیلی در دههٔ ۱۶۳۰ توسط رنه دکارت[1] و پیر دو فرما[2] بطور افسانه‌ای عوض شد. در این وضعیت جدید، مسائل هندسی بر حسب عبارات جبری از نو طراحی شدند، و رده‌های جدیدی از منحنی‌ها توسط شرایط جبری بجای شرایط هندسی، تعریف شدند. مفهوم مشتق در این زمینهٔ جدید بروز کرد. ابتدا مسئلهٔ یافتن خطوط مماس و مسئلهٔ ظاهراً نامربوط یعنی مسئلهٔ یافتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم، که به فرما نسبت داده می‌شوند، در دههٔ ۱۶۳۰ مورد توجه قرار گرفتند. رابطهٔ بین خطوط مماس بر منحنی‌ها و سرعت حرکت یک ذره در اواخر دههٔ ۱۶۶۰ توسط آیزاک نیوتن[3] کشف شد. هر دانشجوی جدید حساب دیفرانسیل پس از برخی تغییرات در اصطلاحات و مفاهیم موجود در نظریهٔ فلوکسیون[4] نیوتن (اصطلاح نیوتن برای حساب دیفرانسیل)، که روی یک ایدهٔ شهودی حد پایه‌ریزی شده، آشنایی دارد. اما نظریات اساسی که در دههٔ ۱۶۸۰ توسط نیوتن و بطور مستقل توسط لایپنیتس[5] ارائه شد، بیانگر این مطلب بود که مساحت زیر منحنی می‌تواند به وسیلهٔ عکس عمل مشتقگیری محاسبه شود. این روش جالب و هیجان انگیز، که مسائل سابقاً مشکل مربوط به مساحت را به آسانی حل می‌کرد، جرقه‌ای بسیار بزرگ و جالب در میان ریاضیدانان آن زمان ایجاد کرد و به نظریه‌ای دارای ارتباطات منطقی هدایت شد، که بعدها به عنوان حسابان، (حساب دیفرانسیل و انتگرال) معروف گردید.

در این فصل نظریهٔ مشتقگیری را بسط می‌دهیم. نظریهٔ انتگرالگیری، به انضمام قضیهٔ اساسی که

1) Rene Descartes(1596-1650) 2) Pierre de Fermat(1601-1665) 3) Isaac Newton(1642-1727) 4) Fluxions 5) Gottfried Wilhelm Leibnitz(1646-1716)

فرض کنید ذره‌ای روی خطی راست حرکت می‌کند، O نقطه‌ای ثابت روی این خط است و $f(t)$ فاصلهٔ ذرهٔ موردنظر از O را در زمان t، $t \geq 0$، نشان می‌دهد. مقداری که دانستنش به‌درد می‌خورد سرعت ذرهٔ موردنظر در زمان t_1، $t_1 > 0$، است. سرعت متوسط اشیا روی یک بازهٔ زمانی برابر با تغییر فاصله تقسیم بر تغییر زمان تعریف می‌شود. با این حال، در لحظهٔ t_1 هیچ تغییر زمانی وجود ندارد و در نتیجه هیچ تغییر فاصله‌ای هم وجود ندارد؛ تعریف منجر به نسبت بی‌معنی $\frac{0}{0}$ به‌عنوان سرعت ذره در زمان t_1 می‌شود. راه‌حل این معما وارد کردن فرایند حدی به بحث است. اگر t زمانی بجز t_1 باشد، آن‌وقت مقدار

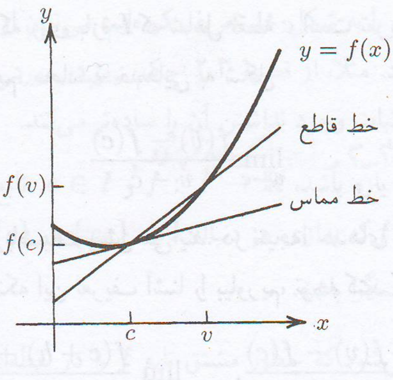
$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$$

سرعت متوسط ذرهٔ موردنظر در بازهٔ زمانی از t_1 تا t را نشان می‌دهد. این مقدار معروف به **نسبت تفاضلی** است، زیرا نسبت دو تفاضل است. اگر در نسبت تفاضلی فرض کنیم $t \to t_1$، به شرطی که حد موردنظر وجود داشته باشد، می‌توانیم سرعت ذرهٔ موردنظر در لحظهٔ t_1 را مشخص کنیم. وقتی که حد

$$\lim_{t \to t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$$

وجود دارد، معمولاً به آن سرعت لحظه‌ای ذره در زمان t_1 می‌گویند. شرایط فیزیکی دیگری (مانند شتاب، آهنگ زوال و آهنگ رشد) وجود دارند که در آنها حد نسبتی تفاضلی دخیل است.

مسئله‌ای کلاسیک نیز در هندسه وجود دارد که مربوط به نسبت‌های تفاضلی از این نوع است. نمودار تابع پیوستهٔ «هموار» را درنظر بگیرید (این نمودار گوشهٔ تیز یا جهش ندارد) و نقطه‌ای را روی این نمودار انتخاب کنید. اگر به این نمودار روی بازه‌ای کوتاه که شامل این نقطه است نگاه کنید، این نمودار به‌نظر خطی راست می‌آید. اگر بازه کوچک شود (و نمودار بزرگ شود)، نتیجه برجسته‌تر می‌شود.



شکل ۱.۴ خطی قاطع خط مماس را تقریب می‌زند.

این نوع رفتارها را روی نمودار کامپیوتری که امکان زوم کردن دارد راحت‌تر می‌توان دید. خطی را که تداعی کنندهٔ نمودار است **خط مماس** بر منحنی در نقطهٔ موردنظر می‌نامند و شیب آن را می‌توان به شیب منحنی در این نقطه تعبیر کرد. برای محاسبهٔ شیب منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $(c, f(c))$، نقطهٔ دیگری مانند $(v, f(v))$ روی نمودار انتخاب کنید و شیب **خط قاطع** ــ خطی که این دو نقطهٔ روی نمودار را به هم وصل می‌کند ــ را پیدا کنید. حد شیب‌های خط‌های قاطع وقتی که $v \to c$ شیب خط مماس در c است (شکل ۱.۴ را ببینید). چون شیب خط قاطع برابر با نسبت تفاضلی $\dfrac{f(v) - f(c)}{v - c}$ است، مسئلهٔ هندسی پیدا کردن شیب خط مماس به مسئلهٔ جبری پیدا کردن حد

$$\lim_{v \to c} \frac{f(v) - f(c)}{v - c}$$

تبدیل می‌شود. این همان مسئلهٔ ریاضی‌ای است که در بند نخست از آن بحث کردیم.

مفهوم ریاضی مربوط به این بحث مشتق است. در این فصل، مشتق تابع را تعریف و برخی ویژگی‌هایش را بررسی می‌کنیم. با اینکه مفهوم مشتق کاربردهای عملی هم دارد (که خواننده با برخی از آنها آشناست) در این کتاب تأکیدمان بر جنبه‌های ریاضی مشتق است. با این همه، چند کاربرد سادهٔ مشتق در تمرین‌ها آمده است.

۱.۴ مشتق تابع

در این بخش، تعریف مشتق و تعدادی از دستورهای معروف پیدا کردن مشتق را می‌آوریم. اکثر این مطالب برای خواننده آشناست. در نتیجه، تعدادی از اثبات‌ها را (که همهٔ آنها در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌آیند، زیرا ایدهٔ عمیقی از آنالیز در آنها نیست) گذاشته‌ایم برای تمرین.

* فصل چهارم : مشتق گیری

*تعریف: فرض کنید $I\subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد، $f:I\to\mathbb{R}$ و $c\in I$. می‌گوییم مشتق تابع f در c برابر عدد حقیقی L است هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 , \ \forall x\in I: 0<|x-c|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-L\right|<\varepsilon.$$

در این صورت می‌گوییم f در c مشتق‌پذیر است و به جای L می‌نویسیم $f'(c)$.

به عبارت دیگر، مشتق f در c برابر است با حد زیر (البته به شرطی که حد زیر وجود داشته باشد)

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

توجه شود ممکن است c نقطه انتهایی بازه I باشد که در آن صورت حد فوق به صورت حد راست یا حد چپ (حد یکطرفه) نوشته می‌شود.

مثال: تابع $f(x)=x^2$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. در این صورت، برای هر $c\in\mathbb{R}$ داریم

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{x^2-c^2}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c)}{x-c}=\lim_{x\to c}(x+c)=2c$$

پس f در هر $x\in\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=2x$.

مثال: فرض کنید $g(x)=\frac{1}{x}$ و $c\neq 0$ عددی حقیقی باشد. در این صورت، داریم

$$g'(c)=\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{c}}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\frac{c-x}{cx}}{x-c}=\lim_{x\to c}\left(-\frac{1}{cx}\right)=-\frac{1}{c^2}.$$

پس g در هر $x\neq 0$ حقیقی، مشتق‌پذیر است و $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

*قضیه: فرض کنید I یک بازه، $f:I\to\mathbb{R}$ و $c\in I$. اگر f در c مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در c پیوسته است.

اثبات) کافی است ثابت کنیم $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$ و برای این کار کافی است ثابت کنیم (به طور معادل)، $\lim_{x\to c}(f(x)-f(c))=0$:

$$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c))=\lim_{x\to c}\left\{(f(x)-f(c))\times\frac{x-c}{x-c}\right\}=\lim_{x\to c}\left\{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\times(x-c)\right\}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{\text{چون } f \text{ در } c \text{ مشتق‌پذیر است پس این حد موجود و برابر } f'(c) \text{ است}}\times\underbrace{\lim_{x\to c}(x-c)}_{=c-c=0}=f'(c)\times 0=0. \checkmark$$

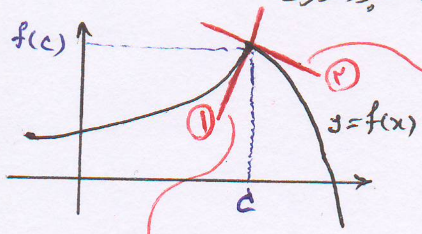
■

*قضیه: فرض کنید I یک بازه، $f:I\to\mathbb{R}$ و $c\in I$. در این صورت:

تابع f در c مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $f'(c)$ است $\Longleftrightarrow$ برای هر دنباله $\{x_n\}$ در $I-\{c\}$ که $x_n\xrightarrow{n\to\infty}c$ آنگاه $\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}\xrightarrow{n\to\infty}f'(c)$

اثبات) با استفاده از قضیه معیار دنباله‌ای برای همگرایی دنباله‌ها (قضیه ۱۴ خرده، (الف)) و تعریف مشتق تابع f در c، حکم به سادگی نتیجه می‌شود. ■

* تذکر: همانطور که در مقدمهٔ این فصل اشاره شد، عدد $f'(c)$، شیب منحنی $y=f(x)$ را در نقطهٔ $(c,f(c))$ نشان می‌دهد.
حال چون منحنی در نقطه‌ای که شکست دارد شیب ندارد، پس در نقطهٔ شکست، مشتق وجود ندارد.



این مطلب در شکل و توضیحات بیان شده است (ملاحظه کنید).

این خط (خط ②) همان خط مماس راست بر منحنی در نقطهٔ c است و شیب آن نیز همان $\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=m_2$ است.

این خط (خط ①) همان خط مماس چپ بر منحنی در نقطهٔ c است و شیب آن نیز همان $\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=m_1$ است.

چون $m_1\neq m_2$ لذا حد $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود نیست و این یعنی در نقطهٔ شکست $(c,f(c))$، تابع f مشتق‌پذیر نیست.

به سادگی و با استفاده از قضیهٔ آخر صفحهٔ قبل می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد.

* قضیه: اگر I یک بازه، $c\in I$ و توابع $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:I\to\mathbb{R}$ در c مشتق‌پذیر باشند، در این صورت:

(الف) برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$، تابع αf در c مشتق‌پذیر است و
$$(\alpha f)'(c)=\alpha f'(c).$$

(ب) توابع $f+g$ و $f-g$ نیز در c مشتق‌پذیرند و
$$(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c) \quad \text{و} \quad (f-g)'(c)=f'(c)-g'(c).$$

* قضیه: اگر I یک بازه، $c\in I$، $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:I\to\mathbb{R}$ در c مشتق‌پذیر باشند، در این صورت:

(الف) ضرب دو تابع یعنی fg نیز در c مشتق‌پذیر است و
$$(fg)'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c).$$

(ب) اگر $g(c)\neq 0$ آنگاه $\frac{f}{g}$ نیز در c مشتق‌پذیر است و
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c)=\frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{(g(c))^2}.$$

اثبات) (الف) را اثبات می‌کنیم، به طور مشابه (ب) اثبات می‌شود.

$$(fg)'(c)=\lim_{x\to c}\frac{(fg)(x)-(fg)(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\left\{\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)}{x-c}+\frac{f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}\right\}=\lim_{x\to c}\left\{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\times g(x)\right\}+\lim_{x\to c}\left\{\overset{\text{عدد ثابت}}{f(c)}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right\}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{\text{همان } f'(c) \text{ که طبق فرض قضیه، موجود است}}\times\underbrace{\lim_{x\to c}g(x)}_{\text{چون } g \text{ در } c \text{ پیوسته است } =g(c)}+f(c)\underbrace{\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}_{\text{همان } g'(c) \text{ که موجود است}}=f'(c)g(c)+f(c)g'(c).$$ ✓ ∎

*** نتیجهٔ ۱:** به کمک استقرا می‌توان نتیجه گرفت اگر f_1، f_2، ...، f_n توابعی از بازهٔ I به $\mathbb{R}$ باشند و همگی در $c\in I$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

الف) $f_1+f_2+\cdots+f_n$ در c مشتق‌پذیر است و

$$(f_1+f_2+\cdots+f_n)'(c)=f_1'(c)+f_2'(c)+\cdots+f_n'(c).$$

ب) ضرب $f_1f_2\cdots f_n$ نیز در c مشتق‌پذیر است و

$$(f_1f_2\cdots f_n)'(c)=f_1'(c)f_2(c)\cdots f_n(c)+f_1(c)f_2'(c)f_3(c)\cdots f_n(c)+\cdots+f_1(c)f_2(c)\cdots f_n'(c).$$

*** نتیجهٔ ۲:** از نتیجهٔ ۱ بالا (قسمت (ب))، اگر $f_1=f_2=\cdots=f_n=f$، آنگاه

$$(f^n)'(c)=n\,f'(c)\,(f(c))^{n-1}.$$

در حالت خاص، اگر $f(x)=x$، آنگاه مشتق $g(x)=x^n$ که $n\in\mathbb{N}$، برابر است با $g'(x)=nx^{n-1}$.

*** قضیه (قاعدهٔ زنجیری):** فرض کنید I یک بازه باشد، $g:I\to\mathbb{R}$، $g(I)\subseteq J$ که J یک بازه، $f:J\to\mathbb{R}$.
اگر $c\in I$، g در c و f در $g(c)$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه $f\circ g$ در c مشتق‌پذیر است و

$$(f\circ g)'(c)=g'(c)\,f'(g(c)).$$

اثبات) فرض کنید تابع $F:J\to\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شود

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{f(t)-f(g(c))}{t-g(c)} & t\neq g(c)\\[2mm] f'(g(c)) & t=g(c)\end{cases}$$

چون f در $g(c)$ مشتق‌پذیر است پس $\lim\limits_{t\to g(c)}\dfrac{f(t)-f(g(c))}{t-g(c)}=f'(g(c))$. پس طبق ضابطهٔ F، تابع F در $g(c)$ پیوسته است. ①

پس تساوی $F(t)(t-g(c))=f(t)-f(g(c))$ به ازای هر $t\in J$ برقرار است ② (زیرا اگر $t\neq g(c)$، آنگاه طبق ضابطهٔ F، تساوی ② برقرار است. ✓ و اگر $t=g(c)$ آنگاه ② یعنی $0=0$. ✓)

با جایگزاری $t=g(x)$ در ② به دست می‌آوریم

$$F(g(x))(g(x)-g(c))=f(g(x))-f(g(c)). \quad ③$$

بنابراین داریم

$$(f\circ g)'(c)=\lim_{x\to c}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{x-c}$$

ضرب عبارت $\dfrac{g(x)-g(c)}{g(x)-g(c)}$ در

$$=\lim_{x\to c}\left\{\underbrace{\boxed{\frac{f(g(x))-f(g(c))}{g(x)-g(c)}}}_{\text{طبق ③}\ =F(g(x))}\times\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right\}=\lim_{x\to c}\left\{F(g(x))\times\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right\}$$

$$=\underbrace{\boxed{\lim_{x\to c}F(g(x))}}_{\text{طبق ①}\ =F(g(c))}\times\underbrace{\boxed{\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}}_{\text{چون } g \text{ در } c \text{ مشتق‌پذیر}\ =g'(c)}=F(g(c))\times g'(c)=f'(g(c))\,g'(c). \checkmark \ \blacksquare$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^4+2x^2+5$ باشد، آنگاه

$$(f\circ g)'(x)=g'(x)\,f'(g(x)) \underset{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}{=} (4x^3+4x)\left(\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\right)=\frac{4x^3+4x}{2\sqrt{x^4+2x^2+5}}$$

(البته هرچند مستقیماً و با توجه به ضابطهٔ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{x^4+2x^2+5}$ نیز می‌توان ضابطهٔ مشتق $(f\circ g)(x)$ را تعیین کرد.)

اکنون در قضیهٔ زیر، رابطهٔ بین مشتق یک تابع مانند f را با مشتق وارونش یعنی f^{-1} (درصورت وجود) بیان می‌کنیم.

* **قضیه** (مشتق تابع وارون): فرض کنید I یک بازه، و $f: I\longrightarrow \mathbb{R}$ اکیداً یکنوا و پیوسته باشد. اگر f در $c\in I$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(c)\neq 0$، آنگاه f^{-1} در $f(c)$ مشتق‌پذیر است و

$$(f^{-1})'(f(c))=\frac{1}{f'(c)}.$$

$$c \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(c)$$

اثبات) با استفاده از قضیهٔ آخر صفحهٔ ۳۱ جزوه، حکم را اثبات می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید $\{y_n\}$ دنباله‌ای در $J-\{f(c)\}$ (J برد f، و بنابراین دامنهٔ f^{-1} است) باشد و $y_n \xrightarrow{n\to\infty} f(c)$. ثابت می‌کنیم

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(f(c))}{y_n-f(c)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{f'(c)}.$$

برای این منظور، فرض کنید $f^{-1}(y_n)=x_n$ (پس: $f(x_n)=y_n$). چون f^{-1} یکنوا و پیوسته است (زیرا: I یک بازه و $f: I\to\mathbb{R}$ پیوسته یکنوای اکید است پس طبق قضیهٔ آخر ص ۳۰ جزوه، f^{-1} پیوسته و یکنوای اکید است)، بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $I-\{c\}$ است که به c همگرا است (زیرا: $f^{-1}: J\to I$ پیوسته، $y_n \xrightarrow{n\to\infty} f(c)$ طبق قضیهٔ آخر ص ۳۱: $x_n=f^{-1}(y_n)\xrightarrow{n\to\infty} f^{-1}(f(c))=c$)

یعنی $x_n \xrightarrow{n\to\infty} c$ (1). بدین ترتیب داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(f(c))}{y_n-f(c)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-c}{f(x_n)-f(c)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}}$$

$$=\frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}}_{\text{طبق قضیهٔ آخر ص ۳۱، برابر } f'(c)}}=\frac{1}{\underbrace{f'(c)}_{\text{طبق فرض مخالف صفر است}}}. \checkmark \quad \blacksquare$$

مثال: فرض کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=5x+\sin(\pi x)$ روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است، مقدار $(f^{-1})'(10)$ را بیابید.

حل) طبق قضیهٔ قبل، می‌دانیم $(f^{-1})'(f(c))=\dfrac{1}{f'(c)}$. در اینجا $10=f(c)$. پس ابتدا c را می‌یابیم.

$$10=f(c)\longrightarrow 10=5c+\sin(\pi c) \xrightarrow[\text{پس یک‌به‌یک است}]{f\ \text{صعودی اکید}} \text{جواب فقط } c=2$$

حال چون $f'(x)=5+\pi\cos\pi x$ پس $f'(c)=f'(2)=5+\pi$ و بنابراین

$$(f^{-1})'(10)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{5+\pi}.$$

ص ۳۵

مثال: ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^3+3x+1$ روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است، سپس معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y=f^{-1}(x)$ را در جایی که $x=5$، پیدا کنید.

حل) اولاً: $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$، اگر $x_1<x_2 \Longrightarrow \begin{cases} x_1^3<x_2^3 \\ 3x_1<3x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1^3+3x_1+1<x_2^3+3x_2+1 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

بنابراین f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. ✓

ثانیاً: معادله خط مماس بر $f^{-1}(x)$ در $x=5$:

$$y-y_1=m(x-x_1) \longrightarrow \boxed{y-1=\frac{1}{6}(x-5)}\ ✓$$

شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در $x=5$ می‌شود

$$m=(f^{-1})'(5) \overset{\text{از قضیه قبل}}{=} \frac{1}{f'(c)}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3(1)^2+3}=\frac{1}{6}$$

روی نمودار f^{-1}: $A\begin{vmatrix} x_1=5 \\ y_1=? \end{vmatrix} \Longrightarrow$ روی نمودار f: $B\begin{vmatrix} y_1=c \ (\text{فرض}) \\ 5=x_1 \end{vmatrix}$

$5=f(c)$

$5=c^3+3c+1$ → $c=1$ → $y_1=1$

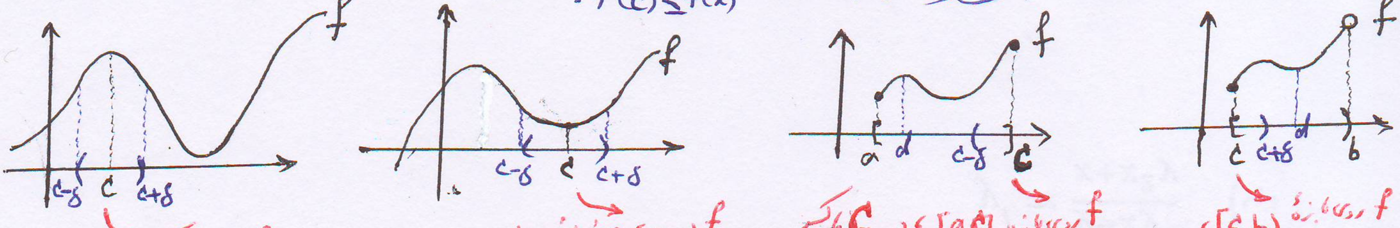
f اکیداً صعودی روی $\mathbb{R}$ پس این معادله جواب منحصر به فرد دارد

* قضیهٔ مقدار میانگین:

قضیهٔ مقدار میانگین، که مقادیر تابع را با مقادیر مشتقش مربوط می‌کند، یکی از مفیدترین نتایج این فصل و به طور کلی در آنالیز است.

قبل از بیان این قضیه، یک تعریف و دو قضیه (قضیهٔ اکسترمم درونی و قضیهٔ رل) را بیان می‌کنیم. (یادآوری)

*تعریف (ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی): فرض کنید I یک بازه و $c\in I$. می‌گوییم تابع $f:I\to\mathbb{R}$ در نقطهٔ c ماکسیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی c مانند $V=V_\delta(c)$ (همسایگی به مرکز c و شعاع δ) وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x\in V\cap I$، $f(x)\le f(c)$. به طور مشابه، گوییم f در c مینیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی c مانند $V=V_\delta(c)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in V\cap I$، $f(c)\le f(x)$.



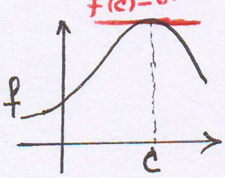
f در c، ماکسیمم نسبی دارد

f در c، مینیمم نسبی دارد

f روی بازه $[a,c]$، در c ماکسیمم نسبی دارد. البته f در d نیز ماکسیمم نسبی دارد.

f روی بازه $[c,b]$، در c مینیمم نسبی دارد. البته f در d نیز مینیمم نسبی دارد.

* قضیه (اکسترمم درونی): فرض کنید I یک بازه باشد، $f:I\to\mathbb{R}$، و c نقطه‌ای در I باشد که یکی از دو سر انتهایی I نیست. اگر f در c مشتق‌پذیر باشد و f در c اکسترمم نسبی داشته باشد، آنگاه $f'(c)=0$.



$f'(c)=0 \rightarrow$ شیب خط مماس

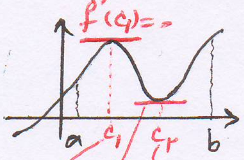
اثبات) فرض: f در c ماکسیمم نسبی دارد (اثبات حالت مینیمم نسبی به طور مشابه). اگر $f'(c)\neq 0$ (برهان خلف)، آنگاه $f'(c)>0$ یا $f'(c)<0$. اگر $f'(c)>0$، آنگاه یک همسایگی c مانند $V\subseteq I$ وجود دارد که برای هر $x\in V$ و $x\neq c$، $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$. پس اگر $x\in V$ و $x>c$:

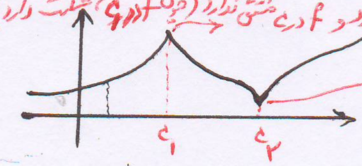
$$f(x)-f(c)=\underbrace{(x-c)}_{>0}\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{>0}>0 \Longrightarrow f(x)>f(c)$$

و این با فرض f در c ماکسیمم نسبی دارد در تناقض است.

برای حالت $f'(c)<0$ نیز به طور مشابه به تناقض می‌رسیم. ☐

* نتیجه: اگر I یک بازه، $f: I \to \mathbb{R}$ و c نقطه‌ای در I باشد که یکی از دو سر انتهایی I نیست، اگر f در c اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه یا f در c مشتق‌ناپذیر است یا $f'(c)=0$.





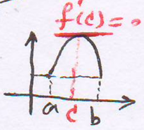
f در c_1 ماکسیمم نسبی دارد و f در c_1 مشتق ندارد (چون در c_1 شکستگی دارد)

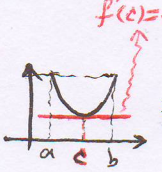
f در c_2 مینیمم نسبی دارد و f در c_2 مشتق ندارد (چون f در c_2 شکستگی دارد)

f در c_2 مینیمم نسبی دارد و $f'(c_2)=0$.

f در این c_1 ماکسیمم نسبی دارد و $f'(c_1)=0$.

* قضیه (قضیه رل): فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a)=f(b)$، آنگاه





$$\exists c\in(a,b): \quad f'(c)=0$$

اثبات) طبق قضیه مقدار اکسترمم (در فصل ۳)، f روی $[a,b]$ ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد. حال اگر $f(x)=f(a)$، $\forall x\in[a,b]$ (یعنی f تابعی ثابت باشد)، آنگاه:

یعنی تابع ثابت

$$\forall x\in(a,b): f'(x)=0 \longrightarrow \exists c\in(a,b): f'(c)=0 \checkmark$$

و حکم حاصل است. ✓

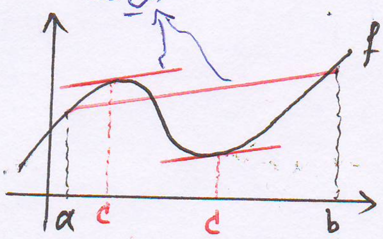
حال اگر f روی $[a,b]$ تابعی ثابت نباشد، طبق قضیه مقدار اکسترمم، $\exists c\in(a,b)$ به طوری که f در c مقدار اکسترمم دارد و لذا طبق قضیه قبل (قضیه اکسترمم درونی)، $f'(c)=0$. ✓ ▨

اکنون قضیه مقدار میانگین را بیان و اثبات می‌کنیم.

* قضیه (قضیه مقدار میانگین): اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\exists c\in(a,b): \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

شیب‌های این دو خط برابرند
این دو خط موازی‌اند



شیب خط مماس بر منحنی f در c

شیب پاره‌خط واصل دو نقطه $\begin{vmatrix}a\\f(a)\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}b\\f(b)\end{vmatrix}$

اثبات) تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$g(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right).$$

به سادگی می‌توان محاسبه کرد که $g(a)=0$ و $g(b)=0$. پس $g(a)=g(b)$ ①. پس داریم:

اولاً: g روی $[a,b]$ پیوسته (چون با توجه به ضابطه g که f روی $[a,b]$ پیوسته پس g نیز پیوسته روی $[a,b]$) و g روی (a,b) مشتق‌پذیر است (چون f اینگونه است)،

ثانیاً: $g(a)=g(b)$، (از ①)

بنابراین تابع g در شرایط قضیه رل صدق می‌کند و بنابراین طبق قضیه رل،

$$\exists c\in(a,b): \quad g'(c)=0$$

$$\Longrightarrow \exists c\in(a,b): f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Longrightarrow \exists c\in(a,b): f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \checkmark$$ ▨

طبق ضابطه g:
$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مثال: ثابت کنید معادله $x^7+x^5+x^3+x+1=0$ دقیقاً یک جواب حقیقی دارد.

حل) باید ثابت کنیم که اولاً: این معادله حداقل یک جواب دارد، ثانیاً: دقیقاً یک جواب دارد.

یکتایی جواب　　　وجود جواب

برای این کار، تابع $f(x)=x^7+x^5+x^3+x+1$ را در نظر می‌گیریم. اکنون داریم:

اثبات اولاً: چون $f(-1)=-3<0$ و $f(1)=5>0$ بنابراین طبق قضیه مقدار میانی،

$\exists c\in(-1,1): f(c)=0 \Longrightarrow$ f حداقل یک ریشه دارد. $\Longrightarrow$ معادله حداقل یک جواب دارد. ✓

اثبات ثانیاً: (برهان خلف) فرض کنیم f بیش از یک ریشه داشته باشد (یعنی فرض کنیم معادله، بیش از یک جواب داشته باشد).
یعنی فرض کنیم معادله دارای حداقل دو جواب متمایز c_1 و c_2 باشد. این یعنی f حداقل دو ریشه متمایز c_1 و c_2 دارد، یعنی

$$\exists c_1,c_2,\ c_1\neq c_2,\quad f(c_1)=f(c_2)=0$$

از طرفی چون $f(x)$ یک چندجمله‌ای است پس روی بازه $[c_1,c_2]$ پیوسته و روی (c_1,c_2) مشتق‌پذیر است و $f(c_1)=f(c_2)=0$، بنابراین طبق قضیه رل:

$$\exists c\in(c_1,c_2): f'(c)=0$$

$$\Longrightarrow \exists c\in(c_1,c_2): \underbrace{\underbrace{7c^6+5c^4+3c^2}_{\geq 0}+1}_{\geq 1}=0 \Longrightarrow \text{تناقض!!}$$

همیشه مخالف صفر

از تناقض حاصل، نتیجه می‌شود که f نمی‌تواند بیش از یک ریشه داشته باشد و این یعنی، معادله بیش از یک ریشه ندارد. ✓

مثال: با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید که به ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند x، $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$.

حل) عدد $x>0$ را دلخواه در نظر بگیرید. تابع $f(t)=\sqrt{1+t}$ را برای $t\in[0,x]$ در نظر بگیرید. f روی $[0,x]$ پیوسته و روی $(0,x)$ مشتق‌پذیر است. بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین:

$$\underbrace{\exists c\in(0,x)}_{\text{پس } c>0}: \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c) \Longrightarrow \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+c}}}_{<\frac12} \Longrightarrow \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$$

>1　　>0

$$\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}.\ ✓$$

مثال: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و f' روی $\mathbb{R}$ کراندار. ثابت کنید f روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

حل) اولاً: f' روی $\mathbb{R}$ کراندار است پس: $\exists M>0, \forall x\in\mathbb{R}: |f'(x)|\leq M$ (۱). از طرفی، برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ که $x<y$، f روی بازه $[x,y]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$\exists c\in(x,y): \frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)$$

$$\Longrightarrow |f(y)-f(x)|=|y-x|\,\underbrace{|f'(c)|}_{\text{از (۱)}\ \leq M}\leq |y-x|\,M \Longrightarrow$$

نتیجه: $\forall x,y\in\mathbb{R}: |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$ (۲)

اکنون برای اثبات پیوستگی یکنواخت بودن f روی $\mathbb{R}$ باید نشان دهیم

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}: \underbrace{|x-y|<\delta}_{(۳)} \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

$$|f(x)-f(y)| \underset{\text{از (۲)}}{\leq} M|x-y| \underset{\text{از (۳)}}{<} M\delta<\varepsilon$$

البته اگر δ به گونه‌ای اختیار شود که $M\delta<\varepsilon$، یعنی کافی است $\delta<\frac{\varepsilon}{M}$ اختیار شود. ✓

* نتایجی از قضیهٔ مقدار میانگین:

* **توجه:** همانطور که در نمودار رسم شده در قضیهٔ مقدار میانگین (صفحهٔ ۳۶) اشاره شده است، تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین این است که نقطه‌ای روی منحنی $y=f(x)$ وجود دارد (مانند $(c,f(c))$) $c\in(a,b)$ که خط مماس در آن نقطه، موازی پاره خطی است که دو نقطهٔ $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ را به هم وصل می‌کند.

قضیهٔ مقدار میانگین مجوزی است برای آنکه بتوان از طریق اطلاعات مربوط به f'، نتایجی دربارهٔ ماهیت تابع f به دست آورد. نتایج زیر از این طریق به دست می‌آیند.

* **نتیجهٔ ۱:** فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)=0$. در این صورت f بر بازهٔ $[a,b]$، تابعی ثابت است.

* **نتیجهٔ ۲:** فرض کنیم f و g بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)=g'(x)$. در این صورت عددی ثابت مانند r موجود است به طوری که برای هر $x\in[a,b]$، $f(x)=g(x)+r$.

اثبات) برای هر $x\in[a,b]$، تابع $h(x)$ را به صورت $h(x)=f(x)-g(x)$ تعریف کنیم. بنابراین h نیز روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است و:

اولاً: برای هر $x\in(a,b)$، $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$.

ثانیاً: برای هر $x,y\in[a,b]$ که $x<y$، تابع h روی $[x,y]$ (از فرض) $[x,y]\subseteq[a,b]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. یعنی:

$$\exists c\in(x,y):\ \underbrace{h'(c)}_{\text{طبق اولاً}=0}=\frac{h(y)-h(x)}{y-x}\Longrightarrow 0=\frac{h(y)-h(x)}{y-x}\Longrightarrow \forall x,y\in[a,b]:h(y)-h(x)=0$$

$$\Longrightarrow \forall x,y\in[a,b]:h(x)=h(y)\Longrightarrow$$ h روی بازهٔ $[a,b]$ تابعی ثابت است

و این یعنی: $\exists r\in\mathbb{R},\forall x\in[a,b]:h(x)=r$ (عددی ثابت) $\Longrightarrow \forall x\in[a,b]:f(x)-g(x)=r \Longrightarrow \forall x\in[a,b]:f(x)=g(x)+r$ ▨

قضیهٔ مقدار میانگین، مبنای تعدادی از نتایج مهم است که در نظریهٔ مشتق‌گیری، از آنها زیاد استفاده می‌شود. قضیهٔ بعدی، یکی از این کاربردها را نشان می‌دهد که به قضیهٔ یکنوایی مشهور است، زیرا شرط‌هایی را مطرح می‌کند که تحت آنها، تابع حتماً یکنواست.

* **قضیه (قضیهٔ یکنوایی):** فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

(الف) اگر روی (a,b)، $f'>0$، آنگاه f روی $[a,b]$ اکیداً صعودی است.
اگر روی (a,b)، $f'<0$، آنگاه f روی $[a,b]$ اکیداً نزولی است.

(ب) اگر روی (a,b)، $f'\geq 0$، آنگاه f روی $[a,b]$ صعودی است.
اگر روی (a,b)، $f'\leq 0$، آنگاه f روی $[a,b]$ نزولی است.

(ج) اگر روی (a,b)، $f'=0$، آنگاه f روی $[a,b]$، تابعی ثابت است.

اثبات) قسمت (الف) حالت اکیداً صعودی را اثبات می‌کنیم، اثبات بقیهٔ قسمت‌ها به طور مشابه است.

پس فرض کنید برای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)>0$ ①. چون با توجه به فرض‌های قضیه، برای هر $x,y\in[a,b]$ که $x<y$ ②، f روی بازهٔ $[x,y]$ $[x,y]\subseteq[a,b]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند بنابراین

$$\exists c\in(x,y):\ f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\Longrightarrow \exists c\in(x,y):\ f(y)-f(x)=\underbrace{(y-x)}_{>0:②\text{طبق}}\underbrace{f'(c)}_{>0:①\text{طبق}}>0\Longrightarrow f(y)>f(x).$$

بنابراین برای هر $x,y\in[a,b]$، نتیجه گرفته‌ایم که اگر $x<y$ آنگاه $f(x)<f(y)$ و این یعنی f روی بازهٔ $[a,b]$، اکیداً صعودی است. ▨

مثال: تابع $f(x)=2x+\sin x$ را درنظر بگیرید.

چون برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=2+\cos x>0$، بنابراین f روی $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی است.

$-1\le \cos x\le 1$

در قضیه‌ی بعدی، شرط کافی برای اینکه تابعی در یک نقطه، درون بازه‌ای دارای اکسترمم نسبی باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. قضیه‌ی زیر به قضیه‌ی «آزمون مشتق اول»، مشهور است.

* قضیه (آزمون مشتق اول): فرض کنید f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و c یک نقطه‌ی درونی $[a,b]$ باشد. فرض کنید f بر (a,c) و (c,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

یعنی شیب خطوط مماس بر منحنی در بازه‌ی $(c-\delta,c)$ نامنفی باشد

(الف) اگر یک همسایگی حول c مانند $(c-\delta,c+\delta)\subseteq[a,b]$ موجود باشد به طوری که روی $(c-\delta,c)$، $f'\ge 0$، و روی $(c,c+\delta)$، $f'\le 0$، آنگاه f در c ماکسیمم نسبی دارد.

یعنی شیب خطوط مماس بر منحنی در بازه‌ی $(c,c+\delta)$، نامثبت باشد

(ب) اگر یک همسایگی حول c مانند $(c-\delta,c+\delta)\subseteq[a,b]$ موجود باشد به طوری که روی $(c-\delta,c)$، $f'\le 0$، و روی $(c,c+\delta)$، $f'\ge 0$، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

اثبات) (الف) را اثبات می‌کنیم، اثبات (ب) به طور مشابه است.

اثبات (الف): اگر $x\in(c-\delta,c)$ دلخواه، آنگاه طبق قضیه‌ی مقدار میانگین (برای تابع f روی بازه‌ی $[x,c]\subseteq[c-\delta,c]$) داریم

$$\exists c_1\in(x,c): \frac{f(c)-f(x)}{c-x}=f'(c_1) \Longrightarrow f(c)-f(x)=(c-x)f'(c_1)\ge 0 \Longrightarrow \forall x\in(c-\delta,c): f(c)-f(x)\ge 0$$

پس: $c_1\in(x,c)\subseteq(c-\delta,c)$ ؛ >0 ؛ $c_1\in(c-\delta,c)$ ؛ ≥ 0 از فرض (الف)

$\forall x\in(c-\delta,c): f(x)\le f(c)$ (1). به طور مشابه می‌توان نشان داد که: $\forall x\in(c,c+\delta): f(x)\le f(c)$ (2).

از (1),(2) $\Longrightarrow \forall x\in(c-\delta,c+\delta): f(x)\le f(c) \Longrightarrow$ f در c، ماکسیمم نسبی دارد. ✓

به طور مشابه، می‌توان قضیه‌ی زیر که به «آزمون مشتق دوم» مشهور است را اثبات کرد.

* قضیه (آزمون مشتق دوم): فرض کنید f روی بازه‌ی (a,b) دوبار مشتق‌پذیر باشد (یعنی f'' موجود باشد) و به ازای نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$، $f'(c)=0$،

(الف) اگر $f''(c)<0$، آنگاه f در c ماکسیمم نسبی دارد.

(ب) اگر $f''(c)>0$، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

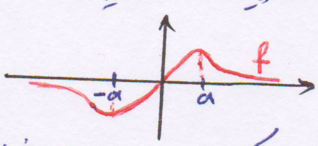
مثال: فرض کنید a عددی مثبت و $f(x)=\frac{x}{x^2+a^2}$. بازه‌هایی را پیدا کنید که f روی آن‌ها صعودی یا نزولی است.

حل) f یک کسر گویا است و چون $a>0$، همواره $x^2+a^2\ge a^2>0$ و لذا f روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. از طرفی، $f'(x)=\frac{-x^2+a^2}{(x^2+a^2)^2}$.

بنابراین:

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{2a}$	↗	$\frac{1}{2a}$	↘	

پس f روی بازه‌ی $[-a,a]$، صعودی، و روی بازه‌های $[a,\infty)$ و $(-\infty,-a]$ نزولی است. (طبق قضیه‌ی یکنوایی)



که البته در این مثال، مینیمم مطلق نیز است

همچنین f در a، ماکسیمم نسبی دارد و در $-a$ نیز مینیمم نسبی دارد (از آزمون مشتق اول) که البته ماکسیمم مطلق f نیز است! (در این مثال)

اکنون در ادامه، تعمیمی از قضیهٔ مقدار میانگین که به کوشی منسوب است را بیان و اثبات می‌کنیم که در اثبات قاعدهٔ هوپیتال، به آن نیاز داریم.

* قضیه (قضیهٔ مقدار میانگین کوشی): اگر f و g بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشند و به ازای هر $x\in(a,b)$، $g'(x)\neq 0$، آنگاه:

$$\exists c\in(a,b):\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(توجه: با انتخاب $g(x)=x$، این قضیه همان قضیهٔ مقدار میانگین ص ۳۶ خواهد بود.)

اثبات) مانند اثبات قضیهٔ مقدار میانگین، تابعی را معرفی می‌کنیم و قضیهٔ رل را برای آن به کار می‌بریم. برای این کار، تابع $h(x)$ را روی $[a,b]$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

این کسر عددی ثابت است!

$$h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)-\big(f(x)-f(a)\big).$$

مخرج $\neq 0$ است. چون طبق فرض داریم برای هر $x\in(a,b)$، $g'(x)\neq 0$، اگر $g(b)-g(a)=0$ آنگاه طبق قضیهٔ مقدار میانگین:

$$\exists c\in(a,b):\ \frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$$

$$\hookrightarrow\ \exists c\in(a,b):\ 0=g'(c)$$

که این با فرض اینکه برای هر $x\in(a,b)$، $g'(x)\neq 0$ در تناقض است.

پس $h(x)$ خوش‌تعریف است!

بنابراین چون f و g بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیرند، پس h نیز اینگونه است. همچنین با یک محاسبهٔ ساده به دست می‌آوریم

$$h(a)=0 \quad \text{و} \quad h(b)=0$$

یعنی $h(a)=h(b)=0$ و لذا طبق قضیهٔ رل،

$$\exists c\in(a,b):\ h'(c)=0$$

$g(a)$ ثابت ← مشتق عدد ثابت صفر

$f(a)$ ثابت ← مشتق عدد ثابت صفر

$$\hookrightarrow\ \exists c\in(a,b):\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g'(c)-0\big)-\big(f'(c)-0\big)=0$$

با تقسیم طرفین بر $g'(c)$ (که طبق فرض مخالف صفر است)

$$\Longrightarrow\ \exists c\in(a,b):\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.\ \checkmark \quad ■$$

* قضیه (قاعدهٔ هوپیتال): فرض کنید f و g روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) به جز احتمالاً در c ($c\in(a,b)$) مشتق‌پذیر و روی $(a,b)-\{c\}$، $g\neq 0$ و $g'\neq 0$. اگر

$$\lim_{x\to c}f(x)=0=\lim_{x\to c}g(x)$$

یا به عبارتی: $f(c)=0=g(c)$ ①

و $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود داشته باشد، آنگاه $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

اثبات) چون f و g در c پیوسته‌اند پس $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$ و $\lim_{x\to c}g(x)=g(c)$ و بنابراین طبق ① (فرض)، $f(c)=0=g(c)$. ②

از فرض، برای هر $x\in(a,b)-\{c\}$، f و g روی هر دو بازهٔ $[x,c]$ (اگر $x<c$) و $[c,x]$ (اگر $c<x$)، در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین کوشی صدق می‌کنند و بنابراین، برای هر دو بازهٔ $[c,x]$ و $[x,c]$ می‌توان گفت، طبق قضیهٔ مقدار میانگین کوشی، عددی مانند c_1 بین c و x وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}.\quad ④$$

③

$\neq 0$ طبق فرض قضیه، این خلاف صفر است.

این هم $\neq 0$ است. دلیلش شبیه توضیحات خلاف صفر بودن $g(b)-g(a)$ در برهان قضیهٔ مقدار میانگین کوشی است.

در نتیجه خواهیم داشت:

۴۱

در نتیجه خواهیم داشت

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\overset{\text{از ۴}}{=}\lim_{x\to c}\frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \checkmark$$

(۲) طبق: $0=f(c)$

(۲) طبق: $0=g(c)$

وقتی $x\to c$، چون طبق (۳) عدد c_1 بین x و c است پس طبق فشردگی، $x\to c_1$.

یعنی $x<c_1<c$ یا $c<c_1<x$

به طور مشابه، قضیه‌های زیر اثبات می‌شود که حالت‌های مبهم $\frac{0}{0}$ را بررسی می‌کنند.

* **قضیه:** فرض کنید f و g بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر و در روی $(a,b)-\{c\}$، $g\neq 0$ و $g'\neq 0$.

اگر $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ (یا $-\infty$)، آنگاه $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ (یا $-\infty$).

* **قضیه:** اگر f و g بر $[a,\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشند و برای $x>a$، $g\neq 0$ و $g'\neq 0$ و $\lim_{x\to\infty}f(x)=0=\lim_{x\to\infty}g(x)$

آنگاه:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

تذکر: در این قضیه، با استفاده از تعویض متغیر $t=\frac{1}{x}$، به بازه $[0,\frac{1}{a}]$ محدود می‌کنیم که در ادامه، به کمک قضیه هوپیتال، حکم حاصل می‌شود.

در قضیه زیر نیز حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ بررسی می‌شود.

* **قضیه:** فرض کنید f و g بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر و در روی $(a,b)-\{c\}$، $g\neq 0$ و $g'\neq 0$.

اگر $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$، آنگاه:

الف) اگر $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد، آنگاه $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجود است و $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ب) اگر $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ (یا $-\infty$)، آنگاه $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ (یا $-\infty$).

* **تذکر:** این قضیه برای حالتی که $x\to\infty$ (یا $x\to-\infty$) نیز برقرار است.

در ادامه به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال:

(۱) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=?$ → حل) $\underset{\text{از هوپیتال}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1$

(۲) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=?$ → حل) $\underset{\text{هوپیتال}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\underset{\text{مجدداً از هوپیتال}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

(۳) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=?$ → حل) $\underset{\text{از هوپیتال}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\cos x=2\sqrt{0}\cos(0)=0\times 1=0$

(۴) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=?$ → حل) $\underset{\text{هوپیتال}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\underset{\text{مجدداً از هوپیتال}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{\cos(0)}{2}=\frac{1}{2}$

۵) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=?$ ← حل) $\overset{\frac{0}{0}}{=}$ (از هوپیتال) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\dfrac{1}{1}=1$

۶) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=?$ ← حل) $\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

از سومین قضیهٔ صفحهٔ قبل البته وقتی بجای $x\to c$، $x\to\infty$ قرار دهیم (یعنی از تذکر زیر قضیه)

۷) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}}{e^{x}}=?$ ← حل) $\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^{x}}\underset{\text{مجدداً}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^{x}}=0$

۸) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln x}=?$ ← حل) $\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}\times\cos x$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}\times\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\cos(0)}=\dfrac{1}{1}=1$

هوپیتال

$\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=\cos(0)=1$

* حالتهای مبهم دیگر:

حالتهای مبهم از قبیل $\infty-\infty$، $\infty\times 0$، $0\times\infty$، 1^{∞}، 0^{0} و ∞^{0} را می‌توان به وسیلهٔ عملیات جبری و یا بکار بردن تابع لگاریتمی و نمایی، به حالتهایی که قبلاً بررسی شده‌اند تبدیل کرده و از قضیه‌ها و نتایج قبلی استفاده کرد. به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=?$ ← حل) $\overset{\infty-\infty\ (\text{مبهم})}{=}$ (مخرج مشترک گیری) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$ (از هوپیتال) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$ (هوپیتال) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\dfrac{0}{2}=0$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=?$ ← حل) $\overset{0\times(-\infty)\ (\text{مبهم})}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

از سومین قضیهٔ صفحهٔ قبل

۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x}=?$ ← حل) $\overset{0^{0}\ (\text{مبهم})}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln(x^{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x\right)}=e^{0}=1$

طبق مثال (۲)

۴) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=?$ ← حل) $\overset{1^{\infty}\ (\text{مبهم})}{=}\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln(1+\frac{1}{x})^{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})\right)}$ (*)

حال چون

$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\overset{\infty\times 0\ (\text{مبهم})}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-\frac{1}{x^{2}}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

از دومین قضیهٔ صفحهٔ قبل

که با جایگذاری در (*) بدست می‌آوریم: $e^{1}=e$ = جواب

۵) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=?$ ← حل) $\overset{\infty^{0}\ (\text{مبهم})}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln(1+\frac{1}{x})^{x}}=e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(1+\frac{1}{x})\right)}$ (**)

که چون برای محاسبهٔ حد قسمت توان داریم

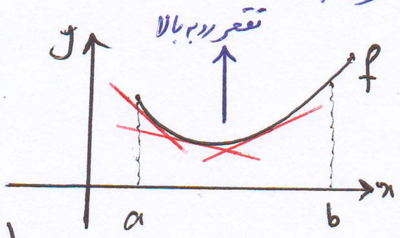
$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\overset{0\times\infty\ (\text{مبهم})}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\overset{\infty/\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{-\frac{1}{x^{2}}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x+1}=0$

در (**) جایگذاری ⟹ $e^{0}=1$ = جواب

*تعریف (مقعر رو به بالا، مقعر رو به پایین): فرض کنید تابع f روی بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد.

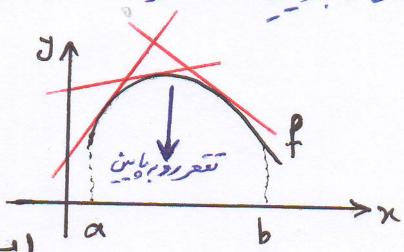
(الف) تابع f روی بازهٔ I مقعر رو به بالا است هرگاه f' روی I صعودی باشد.

(ب) تابع f روی بازهٔ I مقعر رو به پایین است هرگاه f' روی I نزولی باشد.



(الف)

با افزایش x (یعنی از چپ به راست)، عرض شیب خطوط مماس افزایش می‌یابد (یعنی f' صعودی) و تقعر رو به بالا است.



(ب)

با افزایش x (یعنی از چپ به راست)، عرض شیب خطوط مماس کاهش می‌یابد (یعنی f' نزولی) و تقعر رو به پایین است.

با توجه به قضیهٔ آزمون مشتق دوم و تعریف بالا، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

*نتیجه: فرض کنید f روی بازهٔ I دوبار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

(الف) f روی I مقعر رو به بالا است $\Longleftrightarrow$ روی I، $f''\geq 0$.

(ب) f روی I مقعر رو به پایین است $\Longleftrightarrow$ روی I، $f''\leq 0$.

---

*نکته: می‌دانیم اگر f روی بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f روی I پیوسته است، ولی ممکن است خود f' پیوسته نباشد.
یعنی وجود f'، دلیلی بر پیوستگی f' نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: تابع f را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

اولاً: با توجه به ضابطهٔ f، تابع f در هر $x\neq 0$ مشتق‌پذیر است (زیرا x^2 و $\sin(\frac{1}{x})$ در هر $x\neq 0$ مشتق‌پذیرند).

ثانیاً: همچنین در $x=0$ نیز داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin(\frac{1}{x})\overset{\text{صفر × کراندار} = 0}{=}0$$

از اولاً و ثانیاً نتیجه می‌شود که f' در هر $x\in\mathbb{R}$ وجود دارد و

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

ولی خود f' در $x=0$ پیوسته نیست. زیرا f' در $x=0$ حد ندارد (زیرا: $\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}(2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}))$
$=0-\lim_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})=$ موجود نیست)

*هم چنین می‌توان به توابع بسیاری مثال زد که مشتق‌پذیرند ولی مشتقشان پیوسته نیست.

* قضیهٔ تیلور :

یک شیوهٔ بسیار مفید در آنالیز توابع حقیقی ، تقریب توابع به وسیلهٔ چندجمله‌ای‌هاست . در این قسمت یک قضیهٔ بنیادی " در این زمینه بیان می‌کنیم که به قضیهٔ تیلور معروف است . همانطور که قبلاً اشاره شد ، قضیهٔ مقدار میانگین ، مقادیر یک تابع و مشتق مرتبهٔ اول آن را به یکدیگر مربوط می‌کند ، درحالی که قضیهٔ تیلور رابطه‌ای بین مقادیر یک تابع و مشتقات مرتبهٔ بالاتر آن برقرار می‌کند .

* قضیه (قضیهٔ تیلور) : فرض کنیم n عددی طبیعی ، $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که خودش و f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشند و $f^{(n+1)}$ بر (a,b) موجود باشد . اگر $x_0\in[a,b]$ ، آنگاه برای هر $x\in[a,b]$ ، نقطه‌ای مانند c بین x و x_0 وجود دارد به طوری که

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)} .$$

معمولاً این قسمت را با نماد $P_n(x)$ نشان می‌دهند که چندجمله‌ای n-ام بسط تیلور f در x_0 نام دارد

این قسمت را با $R_n(x)$ نشان می‌دهند که باقیمانده بسط تیلور تابع f در نقطهٔ x_0 می‌نامند و برای برآورد خطای تقریب تابع f در بسط تیلورش به کار می‌رود .

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x).$$

* کاربردهای قضیهٔ تیلور :

در مثال‌های زیر به کاربرد قضیهٔ تیلور می‌پردازیم .

مثال : قضیهٔ تیلور را برای تقریب $\sqrt[3]{1+x}$ که $x>-1$ ، با $n=2$ به کار برید .

حل) تابع $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ ، نقطهٔ $x_0=0$ و $n=2$ را در نظر می‌گیریم . بنابراین داریم :

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}\longrightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}\longrightarrow f''(x)=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{5}{3}}$$

$f(0)=1$ ، $f'(0)=\frac{1}{3}$ ، $f''(0)=-\frac{2}{9}$

بنابراین به ازای $\begin{cases} n=2\\ x_0=0\end{cases}$ داریم :

$$f(x)=P_2(x)+R_2(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+R_2(x)=\underbrace{1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2}_{P_2(x)}+R_2(x). \quad (1)$$

که در آن برای نقطه‌ای مانند c بین 0 (x_0) و x :

$$R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}(x-0)^3=\frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}x^3 \quad (2)$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$$

حال اگر مثلاً $x=0.3$ ، آنگاه برای مقدار $f(0.3)=\sqrt[3]{1.3}$ ، طبق (1) ، مقدار تقریبی

$$P_2(0.3)=1+\frac{1}{3}(0.3)-\frac{1}{9}(0.3)^2=1.09$$

را به دست می‌آوریم البته با خطای $R_2(0.3)$ که طبق (2) :

$$R_2(\underbrace{0.3}_{x=0.3})=\frac{5}{81}\underbrace{(1+c)^{-\frac{8}{3}}}_{<1}(0.3)^3<\frac{5}{81}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{1}{600}=\frac{1}{6\times100}=\frac{1}{6}\times10^{-2}<0.17\times10^{-2}$$

$1+c>1$ چون c بین x_0 و x یعنی بین 0 و 0.3 است پس :

$$c>0\Longrightarrow 1+c>1\Longrightarrow (1+c)^{-\frac{8}{3}}<(1)^{-\frac{8}{3}}=1$$

یعنی با خطای کوچکتر از 0.17×10^{-2} داریم $\sqrt[3]{1.3}\simeq1.09$.

مثال: عدد e (عدد نپر) را با خطای کمتر از 10^{-5} تقریب بزنید.

حل) تابع $f(x)=e^x$ و در قضیه تیلور $x_0=0$ و $x=1$ اختیار می‌کنیم (چون به ازای $x=1$: $f(x)=e$).

پس باید n را چنان تعیین کنیم که خطا، یعنی $R_n(x)$ به ازای $x=1$، کمتر از 10^{-5} شود یعنی $|R_n(1)|<10^{-5}$.

چون $f'(x)=e^x$ و $f''(x)=e^x$ و ... و $f^{(n)}(x)=e^x$ و $f^{(n+1)}(x)=e^x$، بنابراین داریم (از بسط تیلور f)

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)} \quad (1)$$

$$=P_n(x)+R_n(x)$$

که به ازای $x_0=0$ و $x=1$ و به ازای یک c بین x_0 و x یعنی بین 0 و 1:

$$\underbrace{P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}}_{(2)} \quad \text{و} \quad R_n(x)=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

حال برای یافتن n، از آنجا که $|R_n(1)|<10^{-5}$ داریم $\frac{e^c}{(n+1)!}<10^{-5}$، که چون $0<c<1$ پس $e^c<3$ و لذا n را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$.

کافی است $n\geq 8$ اختیار شود ✓ ← لذا با اختیار $n=8$، برای $f(1)=e$، با خطای کمتر از 10^{-5}، مقدار تقریبی زیر به دست می‌آید: (از (1) و (2)):

$$e=f(1)\underset{\substack{\text{از (1) با } n=8 \\ x=1}}{\simeq} P_8(1) \underset{\text{از (2)}}{=} 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{8!}=2{,}71828$$

مثال: نشان دهید برای هر $x\in\mathbb{R}$: $1-\frac{1}{2}x^2\leq\cos x$.

حل) با $f(x)=\cos x$ و $x_0=0$ در قضیه تیلور داریم (و $n=2$):

$f'(x)=-\sin x \to f''(x)=-\cos x \to f'''(x)=\sin x$ ؛ $f'(0)=0$ ، $f''(0)=-1$

$$(*) \leftarrow \cos x=f(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\boxed{R_2(x)}$$

$$R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}x^3=\frac{\sin c}{3!}x^3$$

: به ازای عددی مانند c بین x_0 و x یعنی بین 0 و x

اکنون دو حالت زیر را داریم:

حالت ۱: $|x|\leq\pi \Rightarrow -\pi\leq x\leq\pi$

- اگر $0\leq x\leq\pi \to 0\leq c<\pi \to \sin c\geq 0$ و $x^3\geq 0 \to R_2(x)\geq 0$
- اگر $-\pi\leq x\leq 0 \to -\pi<c<0 \to \sin c\leq 0$ و $x^3\leq 0 \to R_2(x)\geq 0$

از (*): $\cos x\geq 1-\frac{1}{2}x^2$ ✓

یا

حالت ۲: $|x|>\pi \to x^2>\pi^2 \to 1-\frac{1}{2}x^2<1-\frac{\pi^2}{2}<1-4=-3<\cos x$ ✓

در هر صورت حکم برقرار است ✓.

مثال: ثابت کنید برای هر $x>0$ و عدد طبیعی k:

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots-\frac{1}{2k}x^{2k}<\ln(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots-\frac{1}{2k}x^{2k}+\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$$

حل) با انتخاب $f(x)=\ln(1+x)$ ، $x>0$ و $x_0=0$ داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}\to f''(x)=-(1+x)^{-2}\to\dots\to f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

$$\Rightarrow \forall n\in N:\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\xRightarrow[x_0=0]{\text{بسط تیلور } f(x)} f(x)=\ln(1+x)=P_n(x)+R_n(x)=\dots=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\underbrace{\frac{(-1)^n}{n+1}(1+c)^{-(n+1)}x^{n+1}}_{R_n(x)}$$

$0<c<x$

اگر $n=2k$ ← $R_{2k}(x)>0$

اگر $n=2k+1$ ← $R_{2k+1}(x)<0$

حکم حاصل است.

فصل ۵

انتگرال ریمان

چنانکه قبلاً اشاره شد در خلال دههٔ ۱۶۳۰ فرما و دکارت به پیشرفتهایی نائل آمدند که منجر به بروز هندسهٔ تحلیلی و نظریهٔ مشتق شد. ولی با وجود این، مبحثی را که ما به عنوان حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) می‌شناسیم تا اواخر دههٔ ۱۶۶۰ هنوز شکل نگرفته بود، تا اینکه آیزاک نیوتن نظریهٔ خود را دربارهٔ «فلوکسیونها» (اصطلاح نیوتن برای مشتق) خلق کرد و روش «مماسهای معکوس» را، برای یافتن مساحت زیرمنحنیها، ابداع نمود. معکوس‌سازی روند پیدا کردن خطوط مماس برای تعیین مساحت نیز توسط گاتفرید لایبنیتس در دههٔ ۱۶۸۰ کشف گردید، که البته او از کار چاپ نشدهٔ نیوتن بی‌اطلاع بود و از مسیر کاملاً متفاوتی به این کشف نایل آمد. لایبنیتس اصطلاحات «حساب دیفرانسیل»[1] و «حساب انتگرال»[2] را معرفی نمود، زیرا در یافتن خطوط مماس، تفاضلها دخالت داشتند و برای یافتن مساحت، مجموعها بکار برده می‌شدند. بنابراین، آنها در حقیقت این واقعیت را کشف کرده بودند که انتگرالگیری، در حالی که یک فرایند مجموعیابی است، عکس عمل مشتقگیری است.

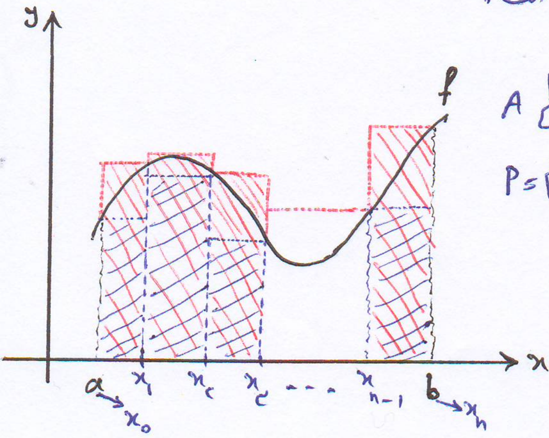
در خلال یک قرن و نیم پیشرفت و پالایش روشهای فنی و مهارتها، حسابان متشکل از این دو عمل تلفیق شده و کاربرد آنها مقدمتاً در مسایل فیزیکی بود. در دههٔ ۱۸۵۰ برنارد ریمان[3] دیدگاه جدید و متفاوتی را اتخاذ کرد. او مفهوم انتگرالگیری را از دوست و یار همدمش، مشتقگیری، جدا کرد و روند مهیج مجموعیابی و حدگیری را برای پیدا کردن مساحتها توسط خود آنها دنبال کرد. او با ملاحظهٔ تمام توابع روی یک بازه که بتوان این روند «انتگرالگیری» را برای تمامی آنها تعریف کرد، یعنی ردهٔ توابع «انتگرالپذیر»، موضوع مورد نظر را توسیع داد و این نتیجه را بدست آورد که قضیهٔ اساسی حسابان فقط برای مجموعهٔ محدودی از توابع انتگرالپذیر برقرار است. دیدگاه ریمان دیگران را هدایت کرد تا نظریه‌های انتگرالگیری

1) Calculus Differentialis 2) Calculus Integralis 3) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

* فصل ۵ : انتگرال ریمان

* بخش اول : انتگرال پذیری ریمان

فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی بازهٔ بسته و کراندار $[a,b]$ و کراندار و مثبت باشد و A نیز مقدار مساحت زیر منحنی f و محدود به بازهٔ $[a,b]$ باشد. هدف یافتن تخمینی برای مقدار این مساحت (یعنی A) است.



هاشور زده با قرمز — هاشور زده با آبی

برای این کار می‌توانیم از مستطیل‌های محیطی (بالایی) و محاطی (پایینی) مربوط به ناحیه سطح A استفاده کنیم (مطابق شکل). برای این منظور، افراز $P=\{x_0=a,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$ را که $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$، برای بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم.

اکنون برای هر $i=1,2,3,\dots,n$، تعریف می‌کنیم:

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$$

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$$

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

مطابق شکل و تعاریف m_i و M_i و Δx_i، پیداست که m_i، طول مستطیل پایینی در بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$، M_i نیز طول مستطیل بالایی در بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ و Δx_i نیز عرض مستطیل بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ است.

اکنون به جای بازهٔ $[a,b]$، هر بازهٔ دیگری مانند I را در نظر بگیرید. بنابراین با توجه به نمادهای تعریف شده در بالا، تعریف زیر را داریم:

* تعریف (مجموع‌های پایینی و بالایی f): فرض کنید I یک بازه و $f:I\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار بر I و $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ افرازی از I باشد. در این صورت مجموع پایینی f متناظر با افراز P به صورت

مجموع پایینی f متناظر با افراز P ← $L(P;f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های پایینی f متناظر با افراز P

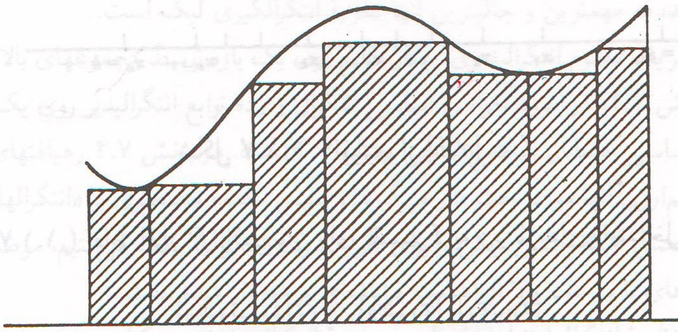
و مجموع بالایی f متناظر با افراز P به صورت

مجموع بالایی f متناظر با افراز P ← $U(P;f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های بالایی متناظر با افراز P

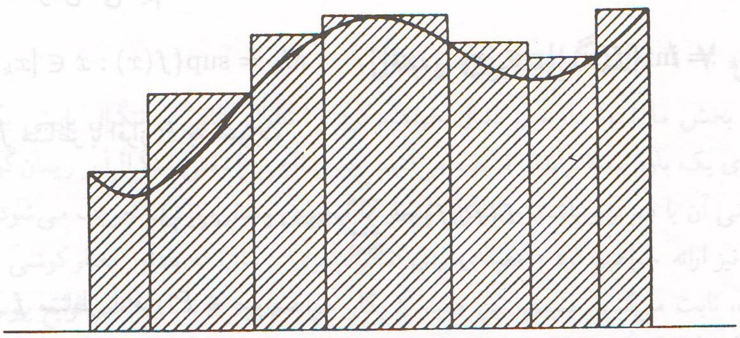
بنابراین با توجه به اینکه برای هر $i=1,2,\dots,n$، $m_i\le M_i$، بنابراین برای مجموع‌های پایینی و بالایی f روی P رابطهٔ زیر برقرار است.

* لم ۱: اگر $f:I\to\mathbb{R}$ کراندار و P افرازی دلخواه از I باشد آنگاه: $L(P;f)\le U(P;f)$.

* تعریف (تظریف): اگر $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ و $Q=\{y_0,y_1,y_2,\dots,y_m\}$ دو افراز برای بازهٔ I باشند به طوری که $P\subseteq Q$ (یعنی هر نقطهٔ P در Q نیز باشد)، آنگاه Q را تظریف P می‌نامیم، یعنی افراز Q ظریف‌تر از افراز P است.

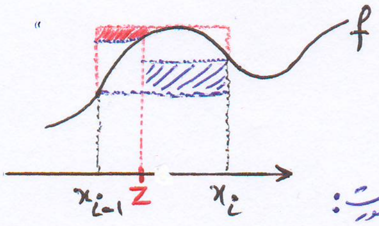


شکل ۲.۱.۷ $L(P; f)$، یک مجموع پایینی



شکل ۳.۱.۷ $U(P; f)$، یک مجموع بالایی

*لم ۲: فرض کنید $f:I\to\mathbb{R}$ کراندار، P افرازی از I و Q تظریفی از P باشد. در این صورت



$$L(P;f)\underset{(*)}{\le} L(Q;f)\underset{\text{از لم قبل}}{\le} U(Q;f)\underset{(**)}{\le} U(P;f)$$

توضیح برای لم بالا از روی شکل: فرض کنید Q یک نقطه بیشتر از P داشته باشد مثلاً z. در این صورت:

توضیح (*): با توجه به شکل مشاهده می‌شود که $L(Q;f)$ به مقدار قسمت‌ها هاشور زده آبی، بیشتر از $L(P;f)$ است (در هر صورت در حالت کلی، مساحت این قسمت‌ها هاشور زده آبی برابر صفر یا بزرگتر از صفر است) ⟵ (*) برقرار است ✓.

توضیح (**): با توجه به شکل مشاهده می‌شود که $U(Q;f)$ به مقدار مساحت‌ها هاشور زده قرمز، کمتر از $U(P;f)$ است (در هر صورت در حالت کلی، مساحت این قسمت‌ها هاشور زده قرمز نیز برابر صفر یا بزرگتر از صفر است) ⟵ (**) برقرار است ✓.

حال اگر Q چند نقطه بیشتر از P داشته باشد، به طور مشابه برای هر یک از نقاط، نتیجه‌ی مشابه بالا (طبق شکل) ولذا در مجموع برای همه‌ی نقاط و در نتیجه Q و P، حکم لم برقرار است.

*لم ۳: فرض کنید $f:I\to\mathbb{R}$ کراندار باشد. اگر P_1 و P_2 دو افراز دلخواه از I باشند آنگاه $L(P_1;f)\le U(P_2;f)$.

اثبات) فرض کنید $Q=P_1\cup P_2$. بنابراین Q نیز افرازی از I و تظریف P_1 و P_2 است. بنابراین:

$$L(P_1;f)\underset{\text{از لم بالا (لم ۲)}}{\le} L(Q;f)\underset{\text{از لم صفحه قبل (لم ۱)}}{\le} U(Q,f)\underset{\text{از لم بالا (لم ۲)}}{\le} U(P_2,f).\ \blacksquare$$

*تعریف (انتگرال‌های بالایی و پایینی): فرض کنید $I=[a,b]$، $f:I\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. در این صورت:

$$L(f)=\text{انتگرال پایینی } f \text{ بر } I=\sup\{L(P;f)\mid P\in\mathcal{P}(I)\}$$

توجه: $\mathcal{P}(I)=$ خانواده‌ی همه‌ی افرازهای بازه‌ی I

$$U(f)=\text{انتگرال بالایی } f \text{ بر } I=\inf\{U(P;f)\mid P\in\mathcal{P}(I)\}.$$

لازم به ذکر است که چون f بر I کراندار است لذا از وجود sup و inf در تعریف بالا، اطمینان داریم. همچنین انتگرال پایینی f بر $I=[a,b]$ را با $L(f)$ یا $\underline{\int_a^b} f$ و انتگرال بالایی f بر $I=[a,b]$ را با $U(f)$ یا $\overline{\int_a^b} f$ نمایش می‌دهند.

*قضیه: فرض کنید $I=[a,b]$ و $f:I\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. در این صورت، انتگرال پایینی $L(f)$ و انتگرال بالایی $U(f)$ موجود هستند و بعلاوه، $L(f)\le U(f)$.

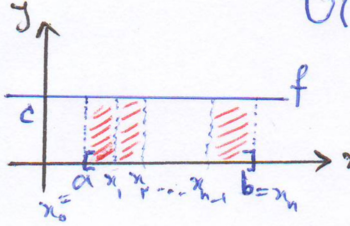
اثبات) اگر P_1 و P_2 افرازهای دلخواهی از I باشند آنگاه طبق لم ۳، $\underbrace{L(P_1;f)\le U(P_2;f)}_{①}$. حال اگر در ①، افراز P_2 را ثابت بگیریم و افراز P_1 دلخواه، بنابراین $\underbrace{U(P_2;f)}_{\text{یک عدد حقیقی}}$ یک کران بالا برای مجموعه‌ی $\{L(P_1;f)\mid P_1\in\mathcal{P}(I)\}$ است و بنابراین $\sup\{L(P_1;f)\mid P_1\in\mathcal{P}(I)\}\le U(P_2;f)$ و این یعنی $\underbrace{\underbrace{L(f)}_{\text{عددی ثابت}}\le U(P_2;f)}_{②}$. حال اگر در ②، افراز P_2 را دلخواه تعمیم، پس طبق ②، $L(f)$ یک کران پایین برای مجموعه‌ی $\{U(P_2;f)\mid P_2\in\mathcal{P}(I)\}$ است و بنابراین داریم

$$L(f)\le\inf\{U(P_2;f)\mid P_2\in\mathcal{P}(I)\}\Longrightarrow L(f)\le U(f).\ \checkmark\ \blacksquare$$

*تعریف: فرض کنید $I=[a,b]$ و $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. اگر $L(f)=U(f)$، آنگاه می‌گوییم تابع f بر بازهٔ I انتگرال‌پذیر ریمان است و مقدار انتگرال ریمان f روی I، مقدار $L(f)=U(f)$ تعریف می‌شود که معمولاً آن را به صورت $\int_a^b f$ یا $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهند. همچنین تعریف می‌کنیم $\int_a^a f=0$ و $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

مثال: تابع ثابت $f(x)=c$ روی بازهٔ $[a,b]$، انتگرال‌پذیر است.

زیرا برای هر افراز دلخواه P از بازهٔ $[a,b]$، $\overbrace{L(P;f)=c(b-a)}^{①}$ و $\overbrace{U(P;f)=c(b-a)}^{②}$



مساحت مستطیل بزرگ = مجموع مساحت‌ها مستطیل‌های پایینی

مساحت مستطیل بزرگ = مجموع مساحت‌ها مستطیل‌های بالایی

و بنابراین:

$$L(f)=\sup\{L(P;f) \mid P\in\mathcal{P}([a,b])\}=\sup\underbrace{\{c(b-a)\}}_{\text{یک مجموعه تک عضوی}}=c(b-a)$$

$$U(f)=\inf\{U(P;f) \mid P\in\mathcal{P}([a,b])\}=\inf\underbrace{\{c(b-a)\}}_{\text{یک مجموعه تک عضوی}}=c(b-a)$$

و $L(f)=U(f)=c(b-a)$ لذا تابع ثابت $f(x)=c$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و انتگرال f روی $[a,b]$ برابر $c(b-a)$ است. یعنی $\int_a^b f(x)dx=c(b-a)$.

<u>اما توضیح برای ① و ②:</u> افراز دلخواه $P=\{x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b\}$ را برای $[a,b]$ در نظر بگیرید. بنابراین:

$$L(P;f)=\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i=\sum_{i=1}^n c\,\Delta x_i=c\sum_{i=1}^n \Delta x_i=c\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})}_{=b-a}=c(b-a)$$

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}(\overset{\text{عدد ثابت}}{c})=c$$

مجموع طول همه زیربازه‌ها $= b-a$

$a=x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad x_n=b$

$$U(P;f)=\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i=\sum_{i=1}^n c\,\Delta x_i=c\sum_{i=1}^n \Delta x_i=c\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})=c(b-a)$$

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}(\overset{\text{عدد ثابت}}{c})=c$$

مثال: نشان دهید تابع دیریکله $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ: $f(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویا}\\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ}\end{cases}$، روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر نیست.

حل) افراز دلخواه $P=\{x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b\}$ را برای بازهٔ $[a,b]$ در نظر بگیرید. بنابراین برای هر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ داریم:

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=0 \quad , \quad M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=1$$

چون مقادیر f یا ۰ یا ۱ است و در هر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ هم اعداد گویا و هم گنگ وجود دارد و f روی هر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ هم مقدار ۰ و هم ۱ را می‌گیرد.

بنابراین:

$$L(P;f)=\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i=\sum_{i=1}^n 0\times \Delta x_i=0 \quad , \quad U(P;f)=\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i=\sum_{i=1}^n \Delta x_i=b-a$$

$$\Longrightarrow L(f)=\sup\{L(P;f) \mid P\in\mathcal{P}([a,b])\}=\sup\{0\}=0 \ne U(f)=\inf\{U(P;f) \mid P\in\mathcal{P}([a,b])\}=\inf\{b-a\}=\overset{>0}{b-a}\ne 0$$

پس f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x)=x$ بر $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است.

برای اثبات این مطلب، افراز P_n را برای بازهٔ $[0,1]$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P_n=\{\underset{x_0}{\overset{a}{0}},\ \underset{x_1}{\frac{1}{n}},\ \underset{x_2}{\frac{2}{n}},\ \underset{x_3}{\frac{3}{n}},\ \dots,\ \underset{x_{n-1}}{\frac{n-1}{n}},\ \underset{x_n}{\frac{n}{n}}\overset{b}{=1}\}$$

یعنی بازهٔ $[0,1]$ را به n تا زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{1}{n}$ تقسیم کرده‌ایم و

$$x_i=\frac{i}{n}\ ,\quad x_i-x_{i-1}=\frac{1}{n}\rightarrow \Delta x_i=\frac{1}{n}$$

همچنین داریم

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}(x)=x_{i-1}=\frac{i-1}{n}\quad \text{و}\quad M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}(x)=x_i=\frac{i}{n}$$

$a=x_0,\ x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{2}{n},\ \dots,\ x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ 1=x_n$

$$\Rightarrow L(P_n;f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{1}{n^2}\big(\underbrace{0+1+2+\dots+(n-1)}_{\frac{(n-1)n}{2}}\big)=\frac{(n-1)n}{2n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2-n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\qquad (1)$$

و

$$U(P_n;f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{n^2}\big(\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}\big)=\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\qquad (2)$$

از طرفی چون مجموعهٔ افرازهای $\{P_n \mid n\in N\}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ افرازهای $[0,1]$ یعنی $\mathcal{P}([0,1])$ است، بنابراین

$$\underbrace{\sup\{L(P_n;f)\mid n\in N\}}_{=\frac{1}{2}\ \text{طبق (1)}}\le \underbrace{\sup\{L(P;f)\mid P\in\mathcal{P}([0,1])\}}_{\text{همان } L(f)}\Rightarrow \frac{1}{2}\le L(f)\qquad (3)$$

و همچنین

$$\underbrace{\inf\{U(P;f)\mid P\in\mathcal{P}([0,1])\}}_{\text{همان } U(f)}\le \underbrace{\inf\{U(P_n;f)\mid n\in N\}}_{=\frac{1}{2}\ \text{طبق (2)}}\Rightarrow U(f)\le\frac{1}{2}\qquad (4)$$

از (3) و (4) نتیجه می‌گیریم:

$$\underset{\text{از (3)}}{\frac{1}{2}\le} L(f)\underset{\text{از قضیه ۴۷}}{\le} U(f)\underset{\text{از (4)}}{\le}\frac{1}{2}$$

و این یعنی $L(f)=U(f)=\frac{1}{2}$

و بنابراین نتیجه می‌شود $f(x)=x$ روی بازهٔ $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است و $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

تمرین: نشان دهید تابع $f(x)=x^2$ بر بازهٔ $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است و مقدار $\int_0^1 f(x)\,dx$ را به دست آورید.

اکنون یکی از مهم‌ترین قضایای این بخش را بیان و اثبات می‌کنیم که در تعیین انتگرال‌پذیری توابع کراندار بر یک بازه $[a,b]$ استفاده می‌شود.

قضیه (معیار ریمان برای انتگرال‌پذیری): فرض کنید $I=[a,b]$ و $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار بر I باشد. در این صورت:

f بر I انتگرال‌پذیر است $\Longleftrightarrow$ برای هر $\varepsilon>0$، افرازی مانند P_ε از I موجود باشد به طوری که

$$U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)<\varepsilon.$$

اثبات) $\Rightarrow$ فرض کنیم f بر I انتگرال‌پذیر است، بنابراین $L(f)=U(f)$ ①

حال $\varepsilon>0$ را دلخواه در نظر بگیرید. طبق تعریف انتگرال پایینی $L(f)$ براساس سوپریمم و ویژگی سوپریمم می‌توان نتیجه گرفت افرازی مانند P_1 از I موجود است به طوری که

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(P_1;f). \quad ②$$

به طور مشابه، طبق تعریف انتگرال بالایی $U(f)$ براساس اینفیمم و ویژگی اینفیمم می‌توان نتیجه گرفت افرازی مانند P_2 از I موجود است به طوری که

$$U(P_2;f)<U(f)+\frac{\varepsilon}{2}. \quad ③$$

اکنون P_ε را به صورت $P_\varepsilon=P_1\cup P_2$ در نظر می‌گیریم. بنابراین P_ε یک تظریف P_1 و P_2 است و در نتیجه داریم

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}\underset{\text{از ②}}{<}L(P_1;f)\le L(P_\varepsilon;f)\le U(P_\varepsilon;f)\le U(P_2;f)\underset{\text{از ③}}{<}U(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

از لم ۲ صفحه ۴۷ جزوه

$$\Longrightarrow U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)<\left(U(f)+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(L(f)-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\underbrace{U(f)-L(f)}_{\text{از ① } =0}+\varepsilon=\varepsilon$$

$$\Rightarrow U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)<\varepsilon. \checkmark$$

اکنون اثبات $\Leftarrow$: یعنی فرض کنیم برای هر $\varepsilon>0$، افرازی مانند P_ε موجود باشد که

$$U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)<\varepsilon. \quad (*)$$

نشان می‌دهیم $L(f)=U(f)$ تا بتوانیم انتگرال‌پذیری f بر I را نتیجه بگیریم. برای این کار، ابتدا دقت کنید برای هر افراز دلخواه P از I داریم

$$\begin{cases} L(P;f)\le L(f) & \text{طبق ویژگی sup} \quad \Rightarrow -L(P;f)\ge -L(f) \\ U(P;f)\ge U(f) & \text{طبق ویژگی inf} \end{cases}$$

$$U(f)-L(f)\le U(P;f)-L(P;f) \quad ④$$

پس به این نتیجه رسیدیم که برای هر افراز دلخواه P از I، رابطه ④ برقرار است از جمله برای افراز P_ε. یعنی:

$$U(f)-L(f)\le U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)\underset{\text{از فرض }(*)}{<}\varepsilon \rightarrow ⑤$$

بنابراین چون $\varepsilon>0$ دلخواه بود پس از ⑤ نتیجه می‌شود $U(f)\le L(f)$ ⑥. از طرفی $L(f)\le U(f)$ ⑦ (از قضیه صفحه ۴۷).

$$\xrightarrow{\text{از ⑥ و ⑦}} L(f)=U(f) \Longrightarrow$$ f روی I، انتگرال‌پذیر است. $\checkmark$ ▨

* نتیجه: فرض کنید $I=[a,b]$ و $f: I\to \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. اگر $\{P_n : n\in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای از افرازهای I باشد به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty}\big(U(P_n;f)-L(P_n;f)\big)=0$، آنگاه f روی I انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}L(P_n;f)=\lim_{n\to\infty}U(P_n;f).$$

مثال: تابع $f(x)=x$ را روی بازه‌ی $[0,1]$ در نظر بگیرید.

طبق آنچه که در صفحه‌ی ۴۹ درباره‌ی این مثال با انتخاب افراز P_n به صورت $P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\dots,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}=1\}$ از بازه‌ی $[0,1]$ انجام شد، به دست آوردیم

$$L(P_n;f)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad U(P_n;f)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

بنابراین داریم

$$\lim_{n\to\infty}\big(U(P_n;f)-L(P_n;f)\big)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

بنابراین طبق نتیجه‌ی بالا، $f(x)=x$ روی بازه‌ی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}L(P_n;f)=\lim_{n\to\infty}U(P_n;f)=\frac{1}{2}.$$

مثال: تابع $f(x)=x^2$ را روی بازه‌ی $[0,1]$ در نظر بگیرید.

در این صورت خواهیم داشت (با همان افراز P_n در مثال بالا):

$$L(P_n;f)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}, \quad U(P_n;f)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

پس از حل تمرین ص ۴۹ — پس از حل تمرین ص ۴۹

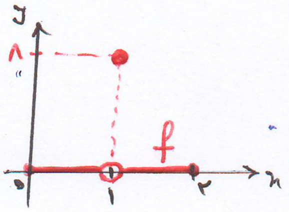
به این ترتیب داریم

$$\lim_{n\to\infty}\big(U(P_n;f)-L(P_n;f)\big)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{6}=0$$

بنابراین طبق نتیجه‌ی بالا، $f(x)=x^2$ روی بازه‌ی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}L(P_n;f)=\lim_{n\to\infty}U(P_n;f)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

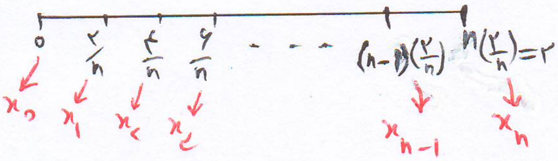
مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 1\\ 8 & x=1\end{cases}$ روی بازه $[0,2]$ انتگرال‌پذیر است.



حل) افراز $P_n=\{0,\frac{2}{n},\frac{4}{n},\frac{6}{n},\dots,(n-1)(\frac{2}{n}),n(\frac{2}{n})=2\}$ را برای بازه $[0,2]$ در نظر می‌گیریم.

که بازه $[0,2]$ به n قسمت مساوی تقسیم کرده که طول هر یک $\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$ است

طول هر زیربازه $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$



از طرفی:

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=\begin{cases}8 & \text{اگر زیربازه } [x_{i-1},x_i] \text{ شامل } x=1 \text{ باشد}\\ 0 & \text{اگر زیربازه } [x_{i-1},x_i] \text{ شامل } x=1 \text{ نباشد}\end{cases}$$

و

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} L(P_n;f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 0\times \Delta x_i=0 \\ U(P_n;f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=0+8\times\frac{2}{n}=\frac{16}{n}\end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(U(P_n;f)-L(P_n;f)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n}=0$$

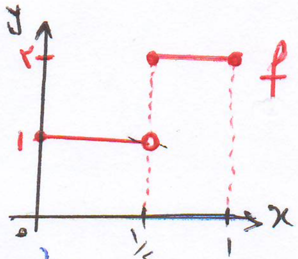
$\Delta x_i=\frac{2}{n}$

فقط در یک زیربازه شامل $x=1$ برابر 8 است و در بقیه زیربازه‌ها صفر است

بنابراین طبق نتیجه صفحه قبل f روی $[0,2]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}L(P_n,f)=\lim_{n\to\infty}U(P_n,f)=0$$

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x<\frac{1}{2}\\ 2 & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$ روی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است.



حل) افراز P_n را به صورت زیر برای $[0,1]$ در نظر می‌گیریم:

به n قسمت مساوی تقسیم، طول‌های زیرتقسیم: $\frac{\frac{1}{2}-0}{n}=\frac{1}{2n}=\Delta x_i$

به n قسمت مساوی تقسیم، طول‌های زیرتقسیم: $\frac{1-\frac{1}{2}}{n}=\frac{1}{2n}=\Delta x_i$

$$P_n=\{0,\frac{1}{2n},\frac{2}{2n},\frac{3}{2n},\dots,n(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},\frac{1}{2}+\frac{2}{2n},\dots,\frac{1}{2}+\frac{n}{2n}=1\}$$

بنابراین به ترتیب داریم:

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=\begin{cases}1 & \text{روی زیربازه‌های سمت چپ } \frac{1}{2}\\ 2 & \text{روی زیربازه‌های سمت راست } \frac{1}{2}\end{cases}$$

نمودار f را ببینید

و

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=\begin{cases}1 & \text{روی زیربازه‌های سمت چپ } \frac{1}{2}\\ 2 & \text{روی زیربازه‌های سمت راست } \frac{1}{2}\end{cases}$$

بنابراین به دست می‌آوریم که:

تعداد $2n$ — که تعداد n تا

$$\begin{cases} L(P_n;f)=\sum m_i\Delta x_i=\text{مجموع مستطیل‌های پایینی سمت چپ } \tfrac{1}{2}+\text{مجموع پایینی سمت راست } \tfrac{1}{2}=\sum m_i\Delta x_i+\sum m_i\Delta x_i=n\times\frac{1}{2n}+2\left(n\times\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2} \\ U(P_n;f)=\sum M_i\Delta x_i=\text{مجموع بالایی سمت چپ } \tfrac{1}{2}+\text{مجموع بالایی سمت راست } \tfrac{1}{2}=\sum M_i\Delta x_i+\sum M_i\Delta x_i=n\times\frac{1}{2n}+2\left(n\times\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}\end{cases}$$

($m_i=1,\ \Delta x_i=\frac{1}{2n}$ ؛ $m_i=2,\ \Delta x_i=\frac{1}{2n}$ ؛ $M_i=1,\ \Delta x_i=\frac{1}{2n}$ ؛ $M_i=2,\ \Delta x_i=\frac{1}{2n}$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(U(P_n;f)-L(P_n;f)\right)=\lim\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)=0$$

$\Rightarrow$ f روی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است ، $\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}L(P_n;f)=\lim_{n\to\infty}U(P_n;f)=\frac{3}{2}$

* انتگرال‌پذیری توابع یکنوا و پیوسته:

اکنون انتگرال‌پذیری توابع یکنوا و نیز توابع پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ را اثبات می‌کنیم و بدین ترتیب، دو خانوادهٔ بزرگ از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$، یعنی یکنوا و پیوسته روی $[a,b]$، حاصل می‌شود.

*** قضیه:** اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ یکنوا باشد، آنگاه f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات) می‌خواهیم از معیار ریمان برای انتگرال‌پذیری (قضیهٔ صفحهٔ ۵۰) استفاده کنیم. فرض کنیم f روی $[a,b]$ صعودی باشد (حالت نزولی به طور مشابه اثبات می‌شود). پس $f(a)\le f(b)$. اگر $f(a)=f(b)$، چون f یکنواست، پس f روی $[a,b]$ تابعی ثابت است که قبلاً (صفحهٔ ۴۸) انتگرال‌پذیری f روی $[a,b]$ اثبات شد. پس فرض می‌کنیم f روی $[a,b]$ صعودی و $f(a)<f(b)$. ①

اکنون $\varepsilon>0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. هدف آن است که افرازی مانند P_ε برای $[a,b]$ پیدا کنیم به طوری که $U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)<\varepsilon$ تا طبق قضیهٔ معیار ریمان، حکم انتگرال‌پذیری f روی $[a,b]$ حاصل شود. برای این کار:

اولاً: چون $\varepsilon>0$ و $(b-a)(f(b)-f(a))>0$ به دلیل طبق ①، بنابراین طبق ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی (از فصل اول)، عددی طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که

نقش b در ویژگی ارشمیدسی

نقش a در ویژگی ارشمیدسی

$$(b-a)(f(b)-f(a))<n\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}<\varepsilon. \quad ②$$

ثانیاً: افراز P_ε را به صورت $P_\varepsilon=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$ در نظر می‌گیریم که در آن $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ (یعنی بازهٔ $[a,b]$ را به n زیربازه با طول‌های یکسان $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ تقسیم می‌کنیم که در اینجا، n همان n حاصل از ویژگی ارشمیدسی در بالاست).

چون f روی $[a,b]$ صعودی است پس روی هر زیربازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ از $[a,b]$ نیز صعودی است و لذا

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=f(x_{i-1}) \quad , \quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=f(x_i) \quad ③$$

بنابراین داریم:

$$U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\overset{\text{از ③}}{=}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\underset{\text{قاعده تلسکوپی}}{=}\frac{b-a}{n}\left(f(x_n)-f(x_0)\right)=\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)\underset{\text{از ②}}{<}\varepsilon. \checkmark$$

بنابراین طبق معیار ریمان، f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. ▨

مثال: فرض کنید $g:[c,d]\to[a,b]$ و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ هر دو، توابعی یکنوا باشند. ثابت کنید $f\circ g$ روی $[c,d]$ انتگرال‌پذیر است.

حل) اگر f صعودی و g صعودی $\longleftarrow$ $f\circ g$ روی $[c,d]$ صعودی (?) $\longleftarrow$ $f\circ g$ روی $[c,d]$ یکنوا

اگر f صعودی و g نزولی $\longleftarrow$ $f\circ g$ روی $[c,d]$ نزولی (?) $\longleftarrow$ $f\circ g$ روی $[c,d]$ یکنوا

طبق قضیه بالا، $f\circ g$ روی $[c,d]$ انتگرال‌پذیر است.

برای دو حالت دیگر نیز به طور مشابه نتیجه می‌گردد $f\circ g$ روی $[c,d]$ یکنواست و لذا $f\circ g$ روی $[c,d]$ انتگرال‌پذیر است.

*قضیه: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات) مشابه قضیه قبل، برای اثبات، از معیار ریمان استفاده می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم برای هر $\varepsilon>0$، افرازی مانند P_ε برای $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)<\varepsilon$. برای این کار، $\varepsilon>0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. اکنون چون $\varepsilon>0$ و $b-a>0$،

نقش a ارشمیدس — نقش b ارشمیدس

بنابراین طبق ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی، عددی طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که $b-a<n\varepsilon$. پس $\frac{b-a}{n}<\varepsilon$. ①

ثانیاً: چون f بر $[a,b]$ پیوسته است پس طبق قضیه (ص ۲۸ در فصل ۳)، f روی $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است. بنابراین، برای $\frac{1}{n}>0$، عدد $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

نقش ε تعریف پیوستگی یکنواخت

$$\forall s,t\in[a,b]:\ |s-t|<\delta \Longrightarrow |f(s)-f(t)|<\frac{1}{n} \quad ②$$

اکنون افراز $P_\varepsilon=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$ را برای $[a,b]$ به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که برای هر i: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}<\delta$ (توجه شود اگر $\frac{b-a}{n}\not<\delta$،

یعنی بازه $[a,b]$ به n زیربازه با طول‌های یکسان تقسیم شود.

در این صورت می‌توان n حاصل از ویژگی ارشمیدسی در رابطه ① را به قدر کافی بزرگ اختیار کرد به طوری که $\frac{b-a}{n}<\delta$).

بنابراین، برای هر i و نیز برای هر $s,t\in[x_{i-1},x_i]$، چون $|s-t|\le\Delta x_i<\delta$، پس طبق ②، $M_i-m_i<\frac{1}{n}$. ③

بدین ترتیب داریم:

$$U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\underset{\text{از ③}}{<}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{1}{n}(b-a)\underset{\text{از ①}}{<}\varepsilon.\ \checkmark$$

بنابراین طبق معیار ریمان، f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. ■

مثال: ثابت کنید که تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^8}\right) & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ روی بازه $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است.

حل) اولاً: برای $0<x\le 1$، با توجه به ضابطه اول f، f پیوسته است $\Leftarrow$ f روی $(0,1]$ پیوسته است.

ثانیاً: برای $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^8}\right)\right)=1+\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^8}\right)=1+(0\times\text{کراندار})=1=f(0)$$

بنابراین f در $x=0$ نیز پیوسته است.

بدین ترتیب، f در هر $x\in[0,1]$ پیوسته است $\Leftarrow$ f روی $[0,1]$ پیوسته $\Leftarrow$ طبق قضیه بالا، f روی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است.

مثال: فرض کنید $g:[c,d]\to[a,b]$ و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ هر دو توابعی پیوسته باشند. بنابراین $f\circ g$ روی بازه $[c,d]$ پیوسته است و در نتیجه $f\circ g$ روی $[c,d]$، انتگرال‌پذیر است.

*نتیجه: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد.

الف) اگر f در $[a,b]$ تعداد متناهی ناپیوستگی داشته باشد، آنگاه f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

ب) اگر f در $[a,b]$ تعداد نامتناهی شمارا ناپیوستگی داشته باشد و این نقاط ناپیوستگی، دنباله‌ای همگرا تشکیل دهند، آنگاه f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

مثال: تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$ را در نظر بگیرید $\Leftarrow$ مجموعه نقاط ناپیوستگی f، $\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ است که نامتناهی شمارا و نیز همگرا به صفر است. لذا f بر $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است.

*بخش دوم: ویژگی‌های انتگرال ریمان

در این بخش، برخی از ویژگی‌های اساسی و مهم انتگرال ریمان را بیان می‌کنیم.

*قضیه: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت برای هر $k\in\mathbb{R}$، توابع kf، $f+g$ و $f-g$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند و

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f \quad , \quad \int_a^b (f\pm g)=\int_a^b f \pm \int_a^b g$$

*قضیه: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و برای هر $x\in[a,b]$، $f(x)\ge 0$، آنگاه $\int_a^b f\ge 0$.

اثبات) چون f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است پس $\int_a^b f = U(f) = L(f)$. از طرفی چون $f\ge 0$ روی $[a,b]$، بنابراین برای هر P از $[a,b]$، $U(P;f)\ge 0$ و بنابراین $U(f)=\inf\{U(P;f)\mid P\in\mathcal{P}[a,b]\}\ge 0$ و لذا $\int_a^b f = U(f)\ge 0$. ■

*نتیجه: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند و برای هر $x\in[a,b]$، $f(x)\le g(x)$، آنگاه $\int_a^b f\le \int_a^b g$.

اثبات) $\forall x\in[a,b]: f(x)\le g(x) \Longrightarrow \forall x\in[a,b]: (g(x)-f(x))\ge 0 \Longrightarrow$ روی $[a,b]$، $g-f\ge 0$

$$\xRightarrow{\text{طبق قضیه قبل}} \int_a^b (g-f)\ge 0 \xRightarrow{\text{از قضیه اول}} \int_a^b g-\int_a^b f\ge 0 \Longrightarrow \int_a^b g\ge \int_a^b f . \checkmark \quad ■$$

*قضیه: اگر f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و $a<c<b$، آنگاه f روی $[a,c]$ و $[c,b]$ نیز انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

تاکنون اشاره کرده‌ایم که مضرب ثابتی از یک تابع انتگرال‌پذیر و نیز مجموع و تفاضل توابع انتگرال‌پذیر نیز، انتگرال‌پذیر است. اکنون نشان می‌دهیم ترکیبات دیگری هم از توابع انتگرال‌پذیر، ممکن است انتگرال‌پذیر باشند. اکنون مفیدترین نتیجه را در این باره، اثبات می‌کنیم.

*قضیه (قضیه ترکیب): فرض کنیم $I=[a,b]$ و $J=[c,d]$ دو بازه باشند و $f:I\to\mathbb{R}$ بر I انتگرال‌پذیر باشد و تابع $\varphi:J\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(I)\subseteq J$. در این صورت $\varphi\circ f:I\to\mathbb{R}$ بر I انتگرال‌پذیر است.

پیوسته — انتگرال‌پذیر

اثبات) فرض کنیم $h=\varphi\circ f$. نشان می‌دهیم معیار ریمان برای تابع h برقرار است. یعنی برای هر $\varepsilon>0$، افرازی مانند P_ε برای $I=[a,b]$ وجود دارد به طوری که $U(P_\varepsilon,h)-L(P_\varepsilon,h)<\varepsilon$.

یا مضرب ثابت و مثبتی از ε

برای این کار، $\varepsilon>0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم.

اولاً: φ روی $J=[c,d]$ پیوسته $\xrightarrow[\text{در فصل سوم}]{\text{طبق قضیه ص ۲۸}}$ φ روی $J=[c,d]$ پیوسته یکنواخت $\xrightarrow[\text{فوق}]{\text{برای همین } \varepsilon \text{ از جمله}}$ $\varepsilon>0$، $\exists\delta>0 \; \forall s,t\in[c,d]: |s-t|<\delta\Rightarrow|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon$ (۱)

بطوریکه $0<\delta<\varepsilon$

ثانیاً: f روی $I=[a,b]$ انتگرال‌پذیر $\xrightarrow[\text{معیار ریمان}]{\text{طبق قضیه}}$ برای $\delta^2>0$، $\exists P=\{x_0=a,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}: U(P;f)-L(P;f)<\delta^2$. (۲)

نقش ε در معیار ریمان

حال اگر فرض کنیم
$$m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x),\quad M_i = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \quad , \quad m_i^* = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} h(x),\quad M_i^* = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} h(x) \quad , \quad M = \sup_{c\le t\le d} |\varphi(t)| .$$

همچنین مجموعه اندیس های $\{1,2,3,\dots,n\}$ را براساس مقدار δ و m_i و M_i به دو دسته زیر ~~تقسیم~~ افراز می کنیم:

$$A=\{i \mid 1\le i\le n ,\ M_i-m_i<\delta\} \quad , \quad B=\{i \mid 1\le i\le n ,\ M_i-m_i\ge\delta\}$$

بنابراین داریم:

$$\forall i\in A:\ M_i-m_i<\delta \Rightarrow \forall s',t'\in[x_{i-1},x_i]: |\underbrace{f(s')}_{\text{نقش } s \text{ در } ①}-\underbrace{f(t')}_{\text{نقش } t \text{ در } ①}| \le |M_i-m_i|<\delta \underset{\text{از } ①}{\Longrightarrow} M_i^*-m_i^*<\varepsilon . \quad ③$$

همچنین داریم

$$\forall i\in B:\ M_i^*-m_i^* \le M_i^*+M_i^* = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} h(x) + \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} h(x) \le \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} |h(x)| + \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} |h(x)| = 2\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} |h(x)| = 2M$$

$$\Rightarrow \forall i\in B:\ M_i^*-m_i^* \le 2M \quad ④$$

$$\forall i\in B:\ \delta\le M_i-m_i \Rightarrow \delta\Delta x_i \le (M_i-m_i)\Delta x_i \Rightarrow \sum_{i\in B}\delta\Delta x_i \le \sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i$$
$$\le \sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i + \sum_{i\in A}(M_i-m_i)\Delta x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i = U(P;f)-L(P;f) \underset{\text{از } ②}{<} \delta^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in B}\delta\Delta x_i < \delta^2 \Rightarrow \delta\sum_{i\in B}\Delta x_i < \delta^2 \Rightarrow \sum_{i\in B}\Delta x_i < \delta \underset{\text{از } ①}{<} \varepsilon . \quad ⑤$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$U(P;h)-L(P;h) = \sum_{i=1}^{n}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i = \sum_{i\in A}\underbrace{(M_i^*-m_i^*)}_{\text{از } ③\ <\varepsilon}\Delta x_i + \sum_{i\in B}\underbrace{(M_i^*-m_i^*)}_{\text{از } ④\ \le 2M}\Delta x_i$$
$$< \varepsilon \underbrace{\sum_{i\in A}\Delta x_i}_{<\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = b-a} + 2M \underbrace{\sum_{i\in B}\Delta x_i}_{\text{از } ⑤\ <\varepsilon} < \varepsilon(b-a)+2M\varepsilon = \underbrace{(b-a+2M)}_{\text{قسمتی ثابت و مثبت}}\varepsilon . \checkmark \quad ■$$

تذکر: اگر از ابتدا به جای ε، $\frac{\varepsilon}{b-a+2M}$ در نظر گرفتیم آنگاه $\cancel{(b-a+2M)}\times\frac{\varepsilon}{\cancel{(b-a+2M)}}$ یعنی در پایان، ε باقی می ماند.

* نتیجه: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت:

(الف) تابع $|f|$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و اگر برای هر $x\in[a,b]$، $|f(x)|\le M$ آنگاه $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le M(b-a)$.

(ب) برای هر عدد طبیعی n، f^n بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. $f^n=\underbrace{f\times f\times\cdots\times f}_{n\ \text{مرتبه}}$

(ج) اگر $\delta>0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in[a,b]$، $f(x)\ge\delta$، آنگاه $\frac{1}{f}$ نیز بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات) چون f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است پس عددی مانند $M>0$ موجود است به طوری که برای هر $x\in[a,b]$، $|f(x)|\le M$.

(الف) فرض کنیم $J=[-M,M]$ و برای $t\in J$، $\varphi(t)=|t|$. در این صورت φ بر J پیوسته است و بنابراین، طبق قضیهٔ قبل، $\underbrace{\varphi}_{\text{پیوسته}}\circ\underbrace{f}_{\text{انتگرال‌پذیر}}=|f|$ انتگرال‌پذیر است. ✓

از طرفی، چون $-|f|\le f\le|f|$، بنابراین طبق نتیجهٔ ص ۵۵،

$$-\int_a^b|f|\le\int_a^b f\le\int_a^b|f| \Longrightarrow \left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\,dx\le\int_a^b M\,dx=M\int_a^b dx=M(b-a). ✓$$

چون $|f|\le M$

(ب) فرض کنیم $J=[-M,M]$ و برای $t\in J$، $\varphi(t)=t^n$. در این صورت φ بر J پیوسته است و بنابراین طبق قضیهٔ قبل، $\underbrace{\varphi}_{\text{پیوسته}}\circ\underbrace{f}_{\text{انتگرال‌پذیر}}=f^n$ انتگرال‌پذیر است. ✓

(ج) از آنجایی که برای هر $x\in[a,b]$، $\delta\le f(x)\le M$، با فرض $J=[\delta,M]$، برای هر $t\in J$ فرض می‌کنیم $\varphi(t)=\frac{1}{t}$. آنگاه φ بر J پیوسته و بنابراین طبق قضیهٔ قبل $\underbrace{\varphi}_{\text{پیوسته}}\circ\underbrace{f}_{\text{انتگرال‌پذیر}}=\frac{1}{f}$ انتگرال‌پذیر است. ✓

مثال: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ کراندار باشد.

(الف) آیا با فرض اینکه $f^2=f\times f$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است می‌توان نتیجه گرفت که f نیز روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است؟ چرا؟

(ب) آیا از انتگرال‌پذیری f^3 روی $[a,b]$ می‌توان انتگرال‌پذیری f روی $[a,b]$ را نتیجه گرفت؟ چرا؟

حل) (الف) خیر. زیرا مثلاً تابع $f(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویا}\\ -1 & \text{اگر } x \text{ گنگ}\end{cases}$ را روی $[a,b]$ در نظر بگیرید. آنگاه $f^2(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویا}\\ 1 & \text{اگر } x \text{ گنگ}\end{cases}$ یعنی $f^2(x)=1$ (f^2 تابع ثابت روی $[a,b]$) و بنابراین طبق مثال ص ۴۸ f^2 روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است اما f روی بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر نیست (دلیلش کاملاً مشابه مثال آخر ص ۴۸ برای تابع دیریکله).

(ب) بله. زیرا تابع $\varphi(t)=\sqrt[3]{t}$ را در نظر بگیرید. بنابراین φ تابعی پیوسته است لذا $\underbrace{\varphi}_{\text{پیوسته}}\circ\underbrace{f^3}_{\text{انتگرال‌پذیر}}=\sqrt[3]{f^3}=f$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

* قضیه (قضیهٔ حاصلضرب): فرض کنید توابع f و g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت تابع حاصلضرب fg بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات) چون f و g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند بنابراین $f+g$ و $f-g$ طبق قضیهٔ اول ص ۵۵ انتگرال‌پذیرند روی $[a,b]$، و در نتیجه $(f+g)^2$ و $(f-g)^2$ طبق قسمت (ب) نتیجهٔ بالای همین صفحه، روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند. پس چون

$$fg=\frac{1}{4}\left\{(f+g)^2-(f-g)^2\right\}$$

بنابراین طبق قضیهٔ اول ص ۵۵، fg روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

∎

* بخش سوم: قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

در این بخش ارتباط بین مشتق و انتگرال را بیان می‌کنیم. در حقیقت، دو قضیه داریم که یکی در ارتباط با انتگرال‌گیری یک مشتق است و دیگری مربوط به مشتق‌گیری یک انتگرال می‌شود. هر دو، این مطلب را بیان می‌کند که اعمال مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، عکس یکدیگرند.
البته با وجود این، نکات ظریف و دقیقی وجود دارند و باید توجه کرد که برقرار بودن فرض‌های این قضیه‌ها را قبل از به کار بردن آن‌ها، بررسی کرد.

*** قضیه (قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (صورت اول)):** فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و $F:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) F بر $[a,b]$ پیوسته باشد؛

ب) F' (مشتق F) موجود باشد و برای هر $x\in(a,b)$، $F'(x)=f(x)$.

در این صورت:

$$\int_a^b f = F(b)-F(a).$$

یا به عبارتی، $\int_a^b F'$

یعنی: $\int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{b}$ ، یعنی:

$F(x)$ انتگرالِ مشتقِ $= F(x)$

یعنی در اینجا، انتگرال و مشتق، معکوس یکدیگرند

اثبات) نشان می‌دهیم برای هر $\varepsilon>0$، $\left|\int_a^b F' - (F(b)-F(a))\right| < \varepsilon$ تا تساوی را نتیجه بگیریم. برای این کار، $\varepsilon>0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم.

اولاً: چون f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است پس طبق قضیه‌ی معیار ریمان، برای این $\varepsilon>0$، افرازی مانند $P_\varepsilon=\{x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b\}$ برای $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $U(P_\varepsilon;f)-L(P_\varepsilon;f)<\varepsilon$ و چون $f=F'$، پس

$$U(P_\varepsilon;F')-L(P_\varepsilon;F')<\varepsilon. \qquad (1)$$

ثانیاً: چون F روی $[a,b]$ شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین را دارد پس روی هر زیربازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ نیز شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد و بنابراین برای هر زیربازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$،

$$\exists\, t_i\in(x_{i-1},x_i):\ \frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{\underbrace{x_i-x_{i-1}}_{\Delta x_i}}=F'(t_i)\ \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{طرفین}}\ F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(t_i)\,\Delta x_i \qquad (2)$$

بنابراین اگر $m_i'=\inf\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}F'(x)$ و $M_i'=\sup\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}F'(x)$، از (2) نتیجه می‌گیریم که

$$m_i'\,\Delta x_i \le F(x_i)-F(x_{i-1}) \le M_i'\,\Delta x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i'\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right) \le \sum_{i=1}^{n} M_i'\,\Delta x_i \Rightarrow L(P_\varepsilon;F')\le F(b)-F(a)\le U(P_\varepsilon;F') \qquad (3)$$

از طرفی برای هر افراز از جمله P_ε می‌دانیم $L(P_\varepsilon;F')\le \int_a^b F' \le U(P_\varepsilon;F')$ (4). بنابراین (از این ویژگی اعداد حقیقی که: اگر $\begin{cases} c_1\le a_1\le d_1\\ c_1\le b_1\le d_1\end{cases}$ آنگاه $|a_1-b_1|\le d_1-c_1$) از (3) و (4) نتیجه می‌شود که

$$\left|\int_a^b F' - (F(b)-F(a))\right| \le U(P_\varepsilon;F')-L(P_\varepsilon;F') \underset{\text{از (1)}}{<} \varepsilon \ \checkmark$$

$\Rightarrow$ چون $\varepsilon>0$ دلخواه بود پس $\int_a^b F' - (F(b)-F(a))=0$ ✓

حکم حاصل است. ▨

۵۹

* **نتیجه**: به طور خلاصه، از قضیه اساسی اول می‌توان گفت:

فرض کنیم $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) F' (مشتق F) بر $[a,b]$ موجود باشد.

ب) F' بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد.

در این صورت:
$$\int_a^b F' = F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

اکنون دومین صورت قضیهٔ اساسی حسابان را ارائه می‌دهیم.

* **قضیه** (قضیهٔ اساسی حسابان (صورت دوم)): فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و برای هر $x\in[a,b]$، $F(x)=\int_a^x f$. در این صورت F بر $[a,b]$ پیوسته است. بعلاوه، اگر f در نقطهٔ $c\in[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه F در c مشتق‌پذیر است و
$$F'(c)=f(c).$$

یعنی: $\left(\int_a^x f\right)' = f(c)$ به ازای $x=c$ که یعنی: مشتقِ انتگرالِ f در $x=c$ $= f(c)$

یعنی در اینجا، مشتق و انتگرال، معکوس یکدیگرند.

اثبات) الف) نشان می‌دهیم F بر $[a,b]$ پیوسته است. برای این کار، نشان می‌دهیم F روی $[a,b]$ پیوستهٔ یکنواخت است تا پیوستگی F نیز حاصل گردد.

چون f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است پس f بر $[a,b]$ کراندار است. یعنی
$$\exists M>0 \text{ و } \forall t\in[a,b]: |f(t)|\le M \quad (1)$$

حال $\varepsilon>0$ را دلخواه در نظر بگیرید. با انتخاب $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ داریم

$$\forall x,y\in[a,b],\ x<y: |x-y|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(y)| = \left|\int_a^x f-\int_a^y f\right| = \left|\int_a^x f+\int_y^a f\right|$$
$$= \left|\int_y^a f+\int_a^x f\right| = \left|\int_y^x f\right| \underset{\text{از } (1)}{\le} \left|\int_y^x M\right| = M|x-y| < M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

پس F روی $[a,b]$ پیوستهٔ یکنواخت است و لذا F روی $[a,b]$ پیوسته است. ✓

ب) اکنون قسمت دوم حکم قضیه را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم f در نقطهٔ $c\in[a,b]$ پیوسته است. ثابت می‌کنیم $F'(c)=\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=f(c)$، و برای این کار به طور معادل ثابت می‌کنیم

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in[a,b]: |x-c|<\delta \Rightarrow \left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)\right|<\varepsilon.$$

برای اثبات، $\varepsilon>0$ را دلخواه انتخاب می‌کنیم. چون f در c پیوسته است پس برای $\varepsilon>0$،
$$\exists\delta>0, \forall t\in[a,b]: |t-c|<\delta\Rightarrow |f(t)-f(c)|<\varepsilon. \quad (2)$$

از طرفی داریم

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)\right| = \left|\frac{F(x)-F(c)-f(c)(x-c)}{x-c}\right| = \frac{1}{|x-c|}\left|\underbrace{F(x)}_{\int_a^x f}-\underbrace{F(c)}_{\int_a^c f}-\underbrace{f(c)}_{\text{عدد ثابت}}(x-c)\right| = \frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x f(t)\,dt-\int_c^x f(c)\,dt\right|$$

$F(x)-F(c) \to \int_c^x f(t)\,dt$ و $f(c)(x-c) \to f(c)\int_c^x dt=\int_c^x f(c)\,dt$

$$= \frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt\right| \underset{\text{از } (2)}{\le} \frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x \varepsilon\, dt\right| = \frac{1}{|x-c|}\times\varepsilon|x-c| = \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ نتیجه: $\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)\right|\le\varepsilon$ $\longrightarrow$ چون $\varepsilon>0$ دلخواه بود پس طبق تعریف مشتق، داریم یعنی $F'(c)=\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=f(c)$ = موجود ✓

* نتیجه: از قضیه اساسی دوم نتیجه می‌شود که:

اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد و برای هر $x\in[a,b]$، $F(x)=\int_a^x f$، آنگاه F بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x\in[a,b]$، $F'(x)=f(x)$.

* قضیه (قضیه اساسی حسابان (صورت مرکب)): فرض کنیم f و F توابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشند و $F(a)=0$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف) برای هر $x\in[a,b]$، $F'(x)=f(x)$؛

ب) برای هر $x\in[a,b]$، $F(x)=\int_a^x f$.

اثبات) با توجه به نتیجه ص ۵۹ و نتیجه ص ۶۰ (نتیجه بالا)، حکم به سادگی به دست می‌آید.

* توضیح: صورت ترکیب در قضیه بالا، همان ترکیب صورت‌های اول و دوم قضیه حسابان البته با فرض‌های قوی‌تری است. صورت مرکب بر این نکته تأکید دارد که طبیعت مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری برای توابع پیوسته، معکوس یکدیگرند.

اکنون در ادامه، برخی از روش‌های انتگرال‌گیری متعارف را که بر قضایای اساسی متکی هستند، ارائه می‌کنیم. این روش‌ها عبارتند از روش جزء به جزء و روش تغییر متغیر.

* قضیه (انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء): اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر روی $[a,b]$ باشند و f' و g' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه $f'g$ و fg' بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند و

$$\int_a^b f'g=\left(f(b)g(b)-f(a)g(a)\right)-\int_a^b fg'.$$

اثبات) اولاً: چون f و g روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر ⟵ f و g روی $[a,b]$ پیوسته ⟵ f و g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر

همچنین f' و g' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر

⟸ $f'g$ و fg' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ✓

ثانیاً: با انتخاب $h(x)=f(x)g(x)$ ⟵ $h'=f'g+fg'$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b h' = h(b)-h(a) \Longrightarrow \int_a^b (f'g+fg') = f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

طبق نتیجه صفحه ۵۹

$$\Longrightarrow \int_a^b f'g+\int_a^b fg' = f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f'g=\left(f(b)g(b)-f(a)g(a)\right)-\int_a^b fg'.$$

* قضیه (انتگرال‌گیری با روش تغییر متغیر): فرض کنید $g:[a,b]\to[c,d]$ روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر و $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ روی $[c,d]$ پیوسته باشد. اگر g' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $(f\circ g)\cdot g'$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b \underbrace{(f\circ g)(x)\cdot g'(x)}_{f(g(x))\cdot g'(x)}\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

با تغییر متغیر $t=g(x)$

در فصل مشتق، قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتق را بیان و اثبات کردیم. اکنون به عنوان مطالب پایانی این فصل، قصد داریم قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال را بیان و اثبات کنیم. قبل از آن، به تعریف مقدار متوسط یک تابع می‌پردازیم.

* **تعریف (مقدار متوسط تابع):** فرض کنید تابع f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و n عددی طبیعی باشد. برای $i=1,2,3,\dots,n$ تعریف می‌کنیم $a_i = a+\frac{b-a}{n} i$ ($\frac{b-a}{n}$ همان Δx_i). در این صورت، یک تخمین برای مقدار متوسط f روی $[a,b]$ برابر است با:

$$\text{مقدار متوسط تخمینی } f \text{ روی } [a,b] = \frac{f(a_1)+f(a_2)+\dots+f(a_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_i}.$$

حال اگر $n\to\infty$، آنگاه سمت چپ به حاصل واقعی مقدار متوسط تابع f روی $[a,b]$ که برابر با حد عبارت سمت راست یعنی $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ تعریف می‌شود، نزدیک می‌شود. یعنی:

$$\text{مقدار متوسط تابع انتگرال‌پذیر } f \text{ روی } [a,b] = \frac{\int_a^b f}{b-a}.$$

مثال: مقدار متوسط تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x\cos x$ را روی بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ به دست آورید.

حل)

$$\text{جواب} = \frac{\int_0^{\pi/2} f(x)dx}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx}{\frac{\pi}{2}} = \frac{x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\right)+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{\pi}$$

با جزء به جزء: $u=x \longrightarrow du=dx$ ، $\cos x\,dx = dv \longrightarrow v=\sin x$

مثال: عدد مثبت b را طوری پیدا کنید که مقدار متوسط تابع $f(x)=x^2+x+1$ روی بازهٔ $[0,b]$ برابر ۱۰ باشد.

حل)

$$\frac{\int_0^b f(x)dx}{b-a}=10 \Rightarrow \frac{\int_0^b (x^2+x+1)dx}{b}=10 \Rightarrow \frac{\frac{b^3}{3}+\frac{b^2}{2}+b}{b}=10 \Rightarrow \frac{b^2}{3}+\frac{b}{2}+1=10$$

$$\Rightarrow 2b^2+3b-54=0 \longrightarrow b=\frac{-3\pm\sqrt{441}}{4} \xrightarrow[\text{از فرض سؤال}]{b>0} b=\frac{-3+\sqrt{441}}{4}=\frac{-3+21}{4} \Rightarrow b=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$$

* **قضیهٔ ۱ (قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال):** اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه

$$\exists c\in[a,b]: \frac{\int_a^b f}{b-a}=f(c).$$

سمت چپ همان مقدار متوسط f روی $[a,b]$ است.

برای اثبات، قضیهٔ بعدی که تعمیم قضیهٔ فوق است را اثبات می‌کنیم که در تعمیم این قضیه، با جایگذاری $g(x)=1$، قضیهٔ فوق حاصل می‌شود.

* **قضیهٔ ۲ (تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال):** اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و g روی $[a,b]$ نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$$\exists c\in[a,b]: \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$$

با $g=1$، همان قضیهٔ ۱ حاصل می‌شود!! : تذکر

اثبات) چون f روی $[a,b]$ پیوسته است پس طبق قضیهٔ مقدار اکسترمم (فصل ۳)، نقاطی مانند $u,v\in[a,b]$ وجود دارند که $\forall x\in[a,b]: \underbrace{f(u)}_{\min f}\le f(x)\le \underbrace{f(v)}_{\max f}$. پس چون $g\ge 0$:

$$f(u)g(x)\le f(x)g(x)\le f(v)g(x) \Rightarrow \int_a^b f(u)g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le\int_a^b f(v)g(x)dx \Rightarrow f(u)\int_a^b g\le\int_a^b fg\le f(v)\int_a^b g \quad (1)$$

اگر $\int_a^b g=0 \xrightarrow{\text{از } (1)} \int_a^b fg=0 \Rightarrow$ سمت چپ حکم $=0=$ سمت راست حکم ✓

اگر $\int_a^b g\ne 0 \longrightarrow$ طرفین (۱) بر $\int_a^b g$ تقسیم: $f(u)\le \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}\le f(v)$ (فرض عدد را مانند S) $\xrightarrow[\text{در فصل ۳}]{\text{از قضیهٔ مقدار میانی}}$ عددی مانند c بین u و v وجود دارد: $f(c)=S \Rightarrow \exists c\in[a,b]: f(c)=S$

$$\Rightarrow \exists c\in[a,b]: f(c)=\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \Rightarrow \int_a^b fg=f(c)\int_a^b g \ ✓ \ \blacksquare$$

الف ۱-۶

فصل ۶ : سری‌های نامتناهی

در این فصل، به مطالعهٔ سری‌های نامتناهی از اعداد حقیقی می‌پردازیم و قضایایی را بیان می‌کنیم که در مطالعهٔ همگرایی یا واگرایی بسیاری از سری‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف: یک سری نامتناهی از اعداد حقیقی به شکل

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots$$

است که در اینجا a_k ها اعدادی حقیقی‌اند. a_k را جملهٔ عمومی این سری می‌نامند. همچنین دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ که در آن

$$s_1=a_1\ ,\ s_2=a_1+a_2\ ,\ a_3=a_1+a_2+a_3\ ,\ \ldots\ ,\ s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\ ,\ \ldots$$

را دنبالهٔ مجموع‌های جزئی سری نامتناهی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ می‌نامند.

تعریف: سری نامتناهی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست هرگاه دنبالهٔ مجموع‌های جزئی آن یعنی $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد. اگر s حد دنبالهٔ $\{s_n\}$ باشد آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ به عدد s همگراست و می‌نویسیم $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ و s مجموع این سری نام دارد.
اگر دنبالهٔ $\{s_n\}$ همگرا نباشد می‌گوییم سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگراست.

* **قضیهٔ ۱:** اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا باشد آنگاه دنبالهٔ $\{a_k\}$ به ۰ همگراست.

اثبات) چون $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست پس دنبالهٔ مجموع‌های جزئی آن یعنی $\{s_n\}$ همگراست. فرض کنیم $\{s_n\}$ به عدد s همگرا باشد. بنابراین از آنجایی که

$$a_k=(a_1+a_2+\cdots+a_k)-(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})=s_k-s_{k-1}$$

پس

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty}(s_k-s_{k-1})=\lim_{k\to\infty} s_k-\lim_{k\to\infty} s_{k-1}=s-s=0$$

یعنی دنبالهٔ $\{a_k\}$ به ۰ همگراست. ■

* **تذکر:** عکس قضیهٔ فوق همیشه درست نیست. به عنوان مثال، $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}}_{a_k}$ را در نظر بگیرید.

اگر چه که $\{a_k=\frac{1}{\sqrt{k}}\}$ به ۰ همگراست ولی برای دنبالهٔ مجموع‌های جزئی آن داریم:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\frac{n}{\sqrt[3]{n}}=n^{\frac{2}{3}}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{3}} = \infty$$

ولذا دنباله‌ی $\{S_n\}$ واگراست و همگرا نیست. واین یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگراست.

* نتیجه (آزمون واگرایی): از عکس نقیض قضیه‌ی ۱، نتیجه می‌شود که اگر $\{a_k\}$ به صفر همگرا نباشد آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا است.

مثال: در سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{3k-1}$، چون $\left\{a_k = \frac{k+2}{3k-1}\right\}$ به عدد $\frac{1}{3}$ همگراست (و به صفر همگرا نیست) پس این سری واگراست.

* قضیه‌ی ۲: سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست اگر و فقط اگر (محک کوشی برای همگرایی سری‌ها)

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall m,n\geq N_0 \text{ که } m<n:\ \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|<\varepsilon.$$

اثبات) فرض کنیم $\{S_n\}$ دنباله‌ی مجموع‌های جزئی سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ باشد. یعنی $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. بنابراین برای هر دو عدد طبیعی m و n که $m<n$ داریم

$$S_n - S_m = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \quad (*)$$

بنابراین،

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ همگراست} \iff \text{دنباله‌ی } \{S_n\} \text{ همگراست} \underset{\text{پس از قضایای فصل دنباله‌ها}}{\overset{S_n \text{ ها اعداد حقیقی‌اند}}{\iff}} \text{دنباله‌ی } \{S_n\} \text{ کوشی}$$

$$\iff \forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall m,n\geq N_0 \text{ که } m<n:\ |S_m - S_n|<\varepsilon$$

$$\underset{\text{از } (*)}{\iff} \forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall m,n\geq N_0 \text{ که } m<n:\ \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|<\varepsilon. \quad \blacksquare$$

* قضیه‌ی ۳: سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ با $a_k\geq 0$، همگراست اگر و فقط اگر دنباله‌ی مجموع‌های جزئی آن، کراندار باشد.

اثبات) از آنجائی که برای هر k، $a_k\geq 0$، لذا دنباله‌ی مجموع‌های جزئی سری یعنی $\{S_n\}$ صعودی است و بنابراین طبق قضایای فصل دنباله‌ها شرط لازم و کافی همگرایی $\{S_n\}$ در این حالت، کرانداری است. $\blacksquare$

با استفاده از دنباله‌ی جمع‌های جزئی، قضیه‌ی زیر به آسانی اثبات می‌شود.

* قضیه‌ی ۴: فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دو سری همگرا باشند و c عددی حقیقی باشد. در این صورت،

الف) سری $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k$ همگراست و $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

ب) سری $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k+b_k)$ همگراست و $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K(K+1)}$ را بررسی کنید.

حل) در اینجا $a_K = \frac{1}{K(K+1)}$. از دنباله جمع‌های جزئی سری یعنی $\{S_n\}$ استفاده می‌کنیم.

$$S_n = \sum_{K=1}^{n} a_K = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K(K+1)} = \sum_{K=1}^{n}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \longrightarrow \underset{S}{\text{همان عدد}}$$

مشاهده می‌شود که دنباله جمع‌های جزئی $\{S_n\}$ به عدد $1=S$ همگراست لذا سری $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ نیز همگراست و حاصل آن 1 می‌شود.

یعنی $\sum_{K=1}^{\infty} a_K = 1$، یعنی $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K(K+1)} = 1$.

مثال: مشخص کنید که سری $\sum_{K=1}^{\infty} \sin K$ همگراست یا خیر.

حل)

$$\lim_{K\to\infty} a_K = \lim_{K\to\infty} \sin K = \text{موجود نیست} \neq 0 \Rightarrow$$

طبق آزمون واگرایی، این سری واگراست.

* **تعریف:** یک سری هندسی به شکل $\sum_{K=0}^{\infty} ar^K$ است که در آن $a \neq 0$ و r اعداد ثابت هستند.

* **قضیه ۵** (سری هندسی): فرض کنید $a \neq 0$. در این صورت،

$$\sum_{K=0}^{\infty} ar^K \text{ همگراست} \iff |r| < 1$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} ar^K \text{ واگراست} \iff |r| \geq 1$$

همچنین وقتی $|r|<1$، در این صورت $\sum_{K=0}^{\infty} ar^K = \frac{a}{1-r}$.

اثبات) اگر $|r| \geq 1$ آنگاه $\lim_{K\to\infty}(ar^K) \neq 0$ و در این صورت طبق آزمون واگرایی، سری $\sum_{K=0}^{\infty} ar^K$ واگراست. ✓

حال اگر $|r|<1$، در این صورت دنباله جمع‌های جزئی این سری به صورت $S_n = \sum_{K=0}^{n} ar^K$ است. یعنی

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad (1)$$

$$\Rightarrow rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \quad (2)$$

با تفاضل جزء به جزء رابطه‌های (1) و (2) داریم

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n) - (ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1}) = a - ar^{n+1}$$

$$\Rightarrow (1-r)S_n = a(1-r^{n+1}) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \overset{\text{چون } |r|<1}{=} \frac{a(1-0)}{1-r}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} \Rightarrow$$

سری هندسی $\sum_{K=1}^{\infty} ar^K$ همگراست و حاصل آن برابر $\frac{a}{1-r}$ است.

ص ۴-۶

مثال:

① $\sum_{k=0}^{\infty} 5\left(\frac{4}{7}\right)^k \underset{\text{یک سری هندسی همگرا}}{\overset{a=5,\ r=\frac{4}{7},\ |r|<1}{=}} \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{4}{7}} = \frac{35}{3}$

② $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k \underset{\text{یک سری هندسی همگرا}}{\overset{a=\frac{3}{4},\ r=\frac{3}{4},\ |r|<1}{=}} \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$

مثال: نشان دهید که سری $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ همگراست.

حل) با استفاده از دنباله جمع‌های جزئی سری،

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^{-k} = 1^{-1} + 2^{-2} + 3^{-3} + \cdots + n^{-n} \le 1^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-n}$$
$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}: S_n \le \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{یک سری هندسی همگرا با } \{a=1,\ r=\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$
دنباله $\{S_n\}$ از بالا به $\frac{3}{2}$ کراندار است

پس نتیجه شد که دنباله جمع‌های جزئی $\{S_n\}$ از بالا کراندار است.

از طرفی، برای هر k طبیعی، $a_k = k^{-k} > 0$ لذا دنباله $\{S_n\}$ صعودی است.

$\Leftarrow$ دنباله $\{S_n\}$ همگراست و بنابراین سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ همگراست. ✓

درس ۵-۶

* آزمون های مقایسه :

چندین راه برای تشخیص اینکه یک سری، همگرا است یا خیر، وجود دارد. در این قسمت دو آزمون، یکی آزمون مقایسه و دیگری آزمون مقایسه‌ی حدّی، بیان می‌کنیم که به همگرایی یا واگرایی سری‌ها، بدون توجه به مقدار سری در صورت همگرایی، می‌پردازند.

*** قضیه ۶ (آزمون مقایسه) :** فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دو سری با جملات غیرمنفی ($a_k\geq 0, b_k\geq 0$) باشند و عددی طبیعی مانند k_0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر $k\geq k_0$ ، $a_k\geq b_k$. در این صورت،

(الف) اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است.

(ب) اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ واگرا است.

مثال : سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+7k+5}$ را در نظر بگیرید.

برای این سری، چون برای هر $k\geq 3$ ،

$$\overset{b_k}{\frac{k^2}{k^3+7k+5}} \geq \frac{k^2}{k^3+k^3+k^3} = \overset{a_k}{\frac{1}{3k}}$$

و $\sum_{k=1}^{\infty} \overset{a_k}{\frac{1}{3k}}$ واگرا است بنابراین طبق قسمت (ب) آزمون مقایسه، $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+7k+5}$ واگرا است.

*** قضیه ۷ (آزمون مقایسه‌ی حدّی) :** فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دو سری با جملات مثبت ($a_k>0, b_k>0$) باشند. فرض کنید دنباله‌ی $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ حدّ تعمیم یافته داشته باشد و α حدّ این دنباله باشد. در این صورت،

یعنی: $0\leq\alpha\leq\infty$ و $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\alpha$

(الف) اگر $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا باشد و $0\leq\alpha<\infty$ آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است.

(ب) اگر $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ واگرا است و $0<\alpha\leq\infty$ آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا است.

اثبات) (الف) فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا باشد و $0\leq\alpha<\infty$. چون دنباله‌ی $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ همگرا است، پس کراندار است. فرض کنید $M>0$ عددی باشد که برای هر k ، $\frac{a_k}{b_k}\leq M$. پس برای هر k ، $0<a_k\leq Mb_k$ ، که چون $\sum_{k=1}^{\infty} Mb_k=M\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا است، طبق آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است. ✓

(ب) فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ واگرا باشد و $0<\alpha\leq\infty$. چون حدّ دنباله‌ی $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ مثبت و برابر α است بنابراین

$$\begin{cases}\exists k_0\in\mathbb{N};\ \forall k\geq k_0:\ \frac{a_k}{b_k}>m\\ \exists m>0\end{cases} \Longrightarrow \forall k\geq k_0:\ a_k\geq mb_k$$

بنابراین طبق آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا است. ✓ ■

مثال: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^3+7k+5}$ را در نظر بگیرید.

با انتخاب $a_k=\frac{k^2}{k^3+7k+5}$ و $b_k=\frac{k^2}{k^3}=\frac{1}{k}$ ، از آنجایی که $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ واگرا است ،

$\alpha=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k^2}{k^3+7k+5}}{\frac{1}{k}}=1$ ، $0<\alpha<\infty$ ، بنابراین طبق قسمت (ب) آزمون مقایسه حدی ، سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

یعنی $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^3+7k+5}$ واگرا است.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید:

(۱) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k+\sqrt{k}}$: روش اول $\left\{\forall k\in\mathbb{N}:\ a_k=\frac{2}{k+\sqrt{k}}\geq\frac{2}{k+k}\right.\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k+\sqrt{k}}\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k+k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=$ واگرا

$a_k\geq 0$ ، $b_k\geq 0$

پس طبق آزمون مقایسه ، $\sum a_k=\sum\frac{2}{k+\sqrt{k}}$ واگرا است.

روش دوم : با انتخاب $a_k=\frac{2}{k+\sqrt{k}}$ و $b_k=\frac{1}{k}$ $\xrightarrow{a_k,b_k>0}\alpha=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{k+\sqrt{k}}}{\frac{1}{k}}=2$

و $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ واگرا است و $0<\alpha=2\leq\infty$ ، پس طبق آزمون مقایسه حدی ، سری $\sum a_k=\sum\frac{2}{k+\sqrt{k}}$ واگرا است.

(۲) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+2k+6}$: با انتخاب $a_k=\frac{1}{k^2+2k+6}$ ، $b_k=\frac{1}{k^2}\to\alpha=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=1$

$a_k>0$ ، $b_k>0$

و $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ همگرا است و $0\leq\alpha=1<\infty$ ، بنابراین طبق آزمون مقایسه حدی ، سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+2k+6}$ همگرا است.

(۳) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{a}-1\right)$: که $a>1$ عددی ثابت است

با انتخاب $a_k=\sqrt[k]{a}-1$ و $b_k=\frac{1}{k}$ ⇝ $\alpha=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{a}-1}{\frac{1}{k}}$ ، $\sqrt[k]{a}=a^{\frac{1}{k}}$

$a_k>0$ ، $b_k>0$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{هوپیتال}}{=}}\lim_{k\to\infty}\frac{-\frac{1}{k^2}a^{\frac{1}{k}}\ln a}{-\frac{1}{k^2}}=\ln a$

و چون $a>1$ پس $0<\alpha=\ln a$ و چون $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ واگرا است ، از آزمون مقایسه حدی نتیجه می‌شود که $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{a}-1\right)$ واگرا است.

*تعریف: سری به شکل $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ که p عددی حقیقی و ثابت است را یک p-سری می‌نامند.

*قضیه ۸ (p-سری): p-سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$، اگر $p>1$ همگرا است و اگر $p \le 1$ واگرا است.

اثبات)

① اگر $p \le 1$:

الف) اگر $p=1$ آنگاه

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\cdots \ge 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{2}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty$$

و لذا طبق آزمون مقایسه، $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ واگرا است. ✓

ب) اگر $0<p<1$ آنگاه چون $\underset{k\in\mathbb{N}}{k^p<k}$ بنابراین $\frac{1}{k^p}>\frac{1}{k}$ و لذا $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$، و چون طبق (الف)، $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ واگرا است پس طبق آزمون مقایسه، برای $0<p<1$، سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ واگرا است. ✓

ج) اگر $p \le 0$ آنگاه $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^p}=\infty \neq 0$ و طبق آزمون واگرایی، $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ واگرا است.

② اگر $p>1$: چون دنباله جمع‌های جزئی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ یعنی $\{S_n\}$ صعودی است (زیرا $a_k=\frac{1}{k^p}>0$)، پس اگر نشان دهیم $\{S_n\}$ از بالا کراندار است، نتیجه می‌شود $\{S_n\}$ همگرا است و لذا همگرایی $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ حاصل می‌شود. برای این کار، برای هر عدد طبیعی n داریم

$$S_{2^n-1} = 1+\overbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)}^{\text{تعداد جملات}=2^1}+\overbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)}^{\text{تعداد جملات}=2^2}+\cdots+\overbrace{\left(\frac{1}{(2^{n-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^p}\right)}^{\text{تعداد جملات}=2^{n-1}}$$

$2 = 2^1$، $3 = 2^2-1$، $4 = 2^2$، $7 = 2^3-1$

$$\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right) \le \frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=2\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

$$\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right) \le \frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=4\left(\frac{1}{4^p}\right)=2^2\left(\frac{1}{(2^2)^p}\right)$$

$$\left(\frac{1}{(2^{n-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^p}\right) \le \frac{1}{(2^{n-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{n-1})^p}=2^{n-1}\left(\frac{1}{(2^{n-1})^p}\right)$$

$$\le 1+2\left(\frac{1}{2^p}\right)+2^2\left(\frac{1}{(2^2)^p}\right)+\cdots+2^{n-1}\left(\frac{1}{(2^{n-1})^p}\right)=\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\left(\frac{1}{(2^k)^p}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{1-p}\right)^k$$

$$2^{k-kp}=2^{(1-p)k}=\left(2^{1-p}\right)^k$$

به این ترتیب برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$S_n \le S_{2^n-1} \le \sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{1-p}\right)^k \le \sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{1-p}\right)^k = \frac{1}{1-2^{1-p}} = \text{عددی ثابت}$$

که یک سری هندسی با قدر نسبت $2^{1-p} < 2^0 = 1$ است، پس یک سری هندسی همگرا

چون $p>1$ پس $1-p<0$

پس: برای هر n، $S_n \le \frac{1}{1-2^{1-p}}$ و لذا $\{S_n\}$ از بالا کراندار است (و چون صعودی نیز است) لذا همگرا است. ∎

مثال: هر یک از سری‌های $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ، $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/4}}$ ، $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\sqrt{2}}}$ و $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$ همگرا هستند.

همچنین هر یک از سری‌ها $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ ، $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{-5}}$ و $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{k^3}}$ واگرا هستند.

مثال: به ازای چه مقادیری از p ، سری $\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-p^2}$ همگراست؟

حل) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-p^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{p^2-p}}$ که طبق قضیه p-سری، وقتی همگراست که $p^2-p>1$. یعنی $p^2-p-1>0$ ، این یعنی وقتی

$$\Delta=5\rightarrow p=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$p>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ یا $p<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ، آنگاه سری فوق همگراست.

مثال: درباره همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{k^3+7}}$ چه می‌توان گفت؟

حل) با انتخاب $a_k=\frac{4}{\sqrt{k^3+7}}$ و $b_k=\frac{1}{\sqrt{k^3}}$ داریم:

$a_k>0$ ، $b_k>0$

$$0\le\alpha=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=4<\infty\Longrightarrow$$

بنابراین چون $0<\alpha=4<\infty$ و $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^3}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ همگراست، پس طبق آزمون مقایسه حدی، سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{k^3+7}}$ نیز همگراست.

* تعریف (حدّ زیرین و حدّ زبرین): فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد.

(الف) اگر $\{x_n\}$ از پایین کراندار باشد آنگاه حدّ زیرین $\{x_n\}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{حدّ زیرین }\{x_n\} = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}_{\text{فرض}=\alpha_n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n .$$

یعنی $\inf\{x_k : k\geq n\}$

اگر $\{x_n\}$ از پایین کراندار نباشد آنگاه حدّ زیرین $\{x_n\}$ برابر $-\infty$ است.

(ب) اگر $\{x_n\}$ از بالا کراندار باشد آنگاه حدّ زبرین $\{x_n\}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{حدّ زبرین }\{x_n\} = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}_{\text{فرض}=\beta_n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\beta_n .$$

یعنی $\sup\{x_k : k\geq n\}$

اگر $\{x_n\}$ از بالا کراندار نباشد آنگاه حدّ زبرین $\{x_n\}$ برابر ∞ است.

* نتیجه: همواره

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

* مثال: دنباله $\{(-1)^n\}$ را در نظر بگیرید. بنابراین

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\} \quad \text{و لذا}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = \inf\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \inf\{-1, 1, -1, \dots\} = -1\\ \alpha_2 = \inf\{x_2, x_3, x_4, \dots\} = \inf\{1, -1, 1, -1, \dots\} = -1\\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1$$

به طور مشابه داریم

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1 = \sup\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \sup\{-1, 1, -1, \dots\} = 1\\ \beta_2 = \sup\{x_2, x_3, x_4, \dots\} = \sup\{1, -1, 1, -1, \dots\} = 1\\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}(1) = 1$$

* مثال: دنباله $\{x_n\}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$4, 3/1, \underline{5/9}, 4, 3/01, 5/99, 4, 3/001, 5/999, \dots$$

به سادگی می‌توان دید که $\liminf_{n\to\infty} x_n = 3$ و $\limsup_{n\to\infty} x_n = 6$.

* مثال: برای دنباله $\{x_n = n^2\}$، $\liminf_{n\to\infty} x_n = \infty$. همچنین برای دنباله $\{x_n = (-1)^n n\}$، $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

* قضیه: فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد، در این صورت:

(الف) اگر $\limsup_{n\to\infty} x_n < \beta$ آنگاه: $\exists N_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq N_0 ;\ x_n < \beta$

(ب) اگر $\alpha < \liminf_{n\to\infty} x_n$ آنگاه: $\exists N_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq N_0 ;\ \alpha < x_n$

(ج) دنباله $\{x_n\}$ همگرا به عدد x است اگر و فقط اگر $\liminf_{n\to\infty} x_n = x = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

برهان: ص ۹۹-۹۸ کتاب اصل گوردون

جلسه ۶-۹

* همگرایی مطلق :

* قضیه : فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یک سری از اعداد حقیقی باشد. اگر $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست.

اثبات) اولاً: برای هر $m,n\in\mathbb{N}$ که $m<n$ داریم

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \quad (1)$$

ثانیاً: چون $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ همگراست پس طبق قضیهٔ ۲ (محک کوشی)،

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N},\ \forall m,n\ge N_0 \text{ که } m<n:\ \left|\sum_{k=m+1}^{n}|a_k|\right|<\varepsilon \xrightarrow{\text{از } (1)} \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|<\varepsilon$$

ولذا مجدداً طبق قضیهٔ ۲ (محک کوشی) می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست. ▨

* تعریف (همگرایی مطلق و همگرایی غیرمطلق) : فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یک سری همگرا باشد.

(الف) اگر $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ را همگرای مطلق می‌نامند.

(ب) اگر $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ را همگرای غیرمطلق (همگرای مشروط) می‌نامند.

آزمون‌های مقایسه و مقایسهٔ حدّی که در بخش قبل اشاره کردیم، آزمون‌هایی برای سری‌های با جملات نامنفی‌اند. اکنون در ادامه به دو آزمون جدید به نام‌های آزمون نسبت و آزمون ریشه می‌پردازیم که برای مطالعهٔ همگرایی مطلق سری‌های نامتناهی استفاده می‌شوند.

* قضیهٔ ۹ (آزمون نسبت) : فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یک سری با جملات غیرصفر باشد.

(الف) اگر $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1$ آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرای مطلق است (ولذا همگراست).

(ب) اگر $\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|>1$ آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگراست.

اثبات) الف) فرض کنید $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1$ و r عددی حقیقی باشد که $\limsup_{k\to\infty}\underbrace{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{=x_k \text{ فرض}}<r<1$ ، بنابراین

$$\exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall k\ge N_0:\ x_k<r \Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<r \Longrightarrow \forall k\ge N_0: |a_{k+1}|<r|a_k|$$

$\forall k\ge N_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_{N_0+1}|<r|a_{N_0}| & (1)\\ |a_{N_0+2}|<r|a_{N_0+1}| \underset{\text{از } (1)}{<} r^2|a_{N_0}| & (2)\\ |a_{N_0+3}|<r|a_{N_0+2}| \underset{\text{از } (2)}{<} r^3|a_{N_0}| \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \end{cases} \xrightarrow[\text{نامساوی}]{\text{جمع طرفین}} |a_{N_0+1}|+|a_{N_0+2}|+|a_{N_0+3}|+\dots \le r|a_{N_0}|+r^2|a_{N_0}|+r^3|a_{N_0}|+\dots$$

و به همین ترتیب الی آخر.

ادامه ۶

$$\Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty}|a_k| \le |a_{N_0}|\sum_{k=1}^{\infty} r^k = |a_{N_0}|\frac{r}{1-r} = \text{عددی ثابت}$$

که یک سری هندسی با قدرنسبت $|r|<1$، و لذا همگراست

بنابراین $\sum_{k=N_0+1}^{\infty}|a_k|$ همگراست و لذا $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ همگراست. بدین ترتیب $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ همگرای مطلق است (و لذا همگراست). ✓

(ب) فرض کنید $\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|>1$. بنابراین،

فرض $=x_k$

$$\exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall k\ge N_0:\ x_k>1 \Rightarrow \forall k\ge N_0: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|>1 \Rightarrow \forall k\ge N_0: |a_{k+1}|>|a_k|$$

بنابراین:

$|a_{N_0+1}|>|a_{N_0}|>0$ ①

$|a_{N_0+2}|>|a_{N_0+1}|>|a_{N_0}|>0$ ② (از ①)

$|a_{N_0+3}|>|a_{N_0+2}|>|a_{N_0}|$ (از ②)

$\vdots$

و با ادامه این روند نتیجه می‌شود که برای هر $k>N_0$، $|a_k|>|a_{N_0}|>0$. بنابراین $\lim_{k\to\infty}|a_k|>|a_{N_0}|>0$ (عددی ثابت و مثبت)، در نتیجه $\lim_{k\to\infty}|a_k|\neq 0$. پس $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ طبق آزمون واگرایی، واگراست. ■

قضیهٔ ۱۰ (آزمون ریشه): فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ یک سری باشد.

(الف) اگر $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}<1$ آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ همگرای مطلق است (و لذا همگراست).

(ب) اگر $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}>1$ آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ واگراست.

اثبات) مشابه اثبات قضیهٔ قبل است. ■

تذکر: یکی از مزیت‌های آزمون‌های ریشه و نسبت به آزمون‌های مقایسه و مقایسه حدی این است که در آن‌ها نیازی به سری دیگری نیست.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

① $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}$ (a_k): $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{5^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{5^k}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{5}{k+1}=0=$ موجود و متناهی

بنابراین $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=0<1$. پس طبق آزمون نسبت، این سری همگرای مطلق است (و لذا همگراست).

② $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-k)^9}{2^k}$ (a_k): $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{(-k)^9}{2^k}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{k^9}}{2}=\frac12\lim_{k\to\infty}(\sqrt[k]{k})^9=\frac12(1)^9=\frac12$ = موجود و متناهی

بنابراین $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\frac12<1$ و در نتیجه طبق آزمون ریشه، این سری همگرای مطلق است (و لذا همگراست).

ص ۱۱-۶

۳) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-۳)^k k!}{k^k}$: $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-۳)^{k+1}\cancel{(k+1)!}^{\,k+1}}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{(-۳)^k \cancel{k!}}{k^k}}\right|$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{۳(k+1)k^k}{(k+1)^{k+1}} = ۳\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^k} = ۳\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\frac{(k+1)^k}{k^k}} = ۳\left(\frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}\right)$$

$$= \frac{۳}{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{۳}{e} =$$ موجود و متناهی

بنابراین $\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{۳}{e} > 1$ و لذا طبق قضیهٔ آزمون نسبت، سری فوق واگراست.

۴) $\sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{K}{۲}\sin\left(\frac{1}{K}\right)\right)^K$: $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{k}{۲}\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right|^k}$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{۲}\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right| = \frac{1}{۲}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\right| \overset{t=\frac{1}{k}}{=\!=} \frac{1}{۲}\lim_{t\to 0}\left|\frac{\sin t}{t}\right| = \frac{1}{۲}\times 1 = \frac{1}{۲}$$

بنابراین $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{۲} < 1$ و طبق آزمون ریشه، سری فوق همگرای مطلق است (و لذا همگراست).

* قضیهٔ ۱۱ (آزمون سری متناوب): اگر $\{a_k\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت و همگرا به ۰ باشد، آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ همگراست.

علاوه بر این، اگر S حاصل این سری باشد و S_n مجموع جزئی n-ام این سری، آنگاه برای هر عدد طبیعی n، $|S_n - S| \le a_{n+1}$.

اثبات) برای اثبات نشان می‌دهیم دنبالهٔ جمع‌های جزئی سری $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$، یعنی $\{S_n\}$، همگراست. برای این کار نشان می‌دهیم که هر دو دنبالهٔ $\{S_{۲n}\}$ و $\{S_{۲n-1}\}$ همگرا به یک عدد هستند تا نتیجه بگیریم $\{S_n\}$ همگراست.

برای اثبات همگرایی $\{S_{۲n}\}$ نشان می‌دهیم که $\{S_{۲n}\}$ صعودی و از بالا کراندار است. برای این کار داریم

$$\forall n\in\mathbb{N}: S_{۲(n+1)} = S_{۲n+۲} = \underbrace{a_1-a_۲+a_۳-a_۴+\cdots-a_{۲n}}_{S_{۲n}}+a_{۲n+1}-a_{۲n+۲} = S_{۲n}+\underbrace{(a_{۲n+1}-a_{۲n+۲})}_{\ge 0}\ge S_{۲n}$$

چون $\{a_n\}$ نزولی است

$$\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: S_{۲(n+1)} \ge S_{۲n} \Longrightarrow$$ دنبالهٔ $\{S_{۲n}\}$ صعودی است (۱)

از طرفی،

$$\forall n\in\mathbb{N}: S_{۲n} = a_1-a_۲+a_۳-a_۴+\cdots-a_{۲n-۲}+a_{۲n-1}-a_{۲n} = a_1+\underbrace{(a_۳-a_۲)}_{\le 0}+\underbrace{(a_۵-a_۴)}_{\le 0}+\cdots+\underbrace{(a_{۲n-1}-a_{۲n-۲})}_{\le 0}-\underbrace{a_{۲n}}_{\ge 0} \le a_1$$

چون $\{a_n\}$ نزولی

بدین ترتیب، برای هر عدد طبیعی n، $S_{۲n} \le a_1$. پس a_1 یک کران بالای $\{S_{۲n}\}$ است و لذا $\{S_{۲n}\}$ از بالا کراندار است. (۲)

$\xrightarrow{\text{از ۱ و ۲}}$ دنبالهٔ $\{S_{۲n}\}$ صعودی و کراندار $\Longrightarrow$ $\{S_{۲n}\}$ همگراست.

حال چون $S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$ پس

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} - \cancel{\lim_{n\to\infty} a_{2n}}^{\text{طبق فرض قضیه}\ \to 0} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \Longrightarrow$$ $\{S_n\}$ همگراست

و لذا سری $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ همگراست. ✓

برای اثبات قسمت دوم حکم قضیه، چون $\{S_{2n}\}$ و $\{S_{2n-1}\}$ به یک عدد همگرا هستند، پس به عدد S یعنی حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ همگرا هستند و لذا می‌توان گفت $\{S_{2n}\}$ دنباله‌ای صعودی و همگرا به S و $\{S_{2n-1}\}$ دنباله‌ای نزولی (اثبات مشابه آنچه برای $\{S_{2n}\}$ انجام شد) و همگرا به S است. پس:

$\forall n\in N$: عدد S بین S_n و S_{n+1} قرار دارد $\Longrightarrow \forall n\in N: |S_n - S| \le |S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}| = a_{n+1}$ ✓ ■

مثال: سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ را در نظر بگیرید:

این یک سری متناوب با $a_k = \frac{1}{k}$ است. $\{a_k\}$ دنباله‌ای نزولی، مثبت و همگرا به صفر است، پس طبق آزمون سری متناوب، این سری همگراست.

* تجدید آرایش:

وقتی که تعداد متناهی عدد را با هم جمع می‌کنیم، ترتیب نوشتن عددها در جمع، تأثیری در مجموع آن‌ها ندارد؛ این مطلب نتیجهٔ ویژگی شرکت‌پذیری جمع است. با این حال، این ویژگی جمع را نمی‌توان به مجموع تعداد نامتناهی از اعداد حقیقی تعمیم داد؛ یعنی ممکن است با جابجایی جملات یک سری (تجدید آرایش)، حاصل جمع سری تغییر کند. به مثال زیر توجه کنید.

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} - \cdots \overset{\text{طبق آزمون سری متناوب همگراست}}{=} \; < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad ①$$

اکنون آرایش جملات S_1 را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$S_2 = \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{>0} + \cdots = \left(\text{تجدید آرایش به شکل یک جملهٔ منفی + دو جملهٔ مثبت است}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$> \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \quad ②$$

ملاحظه می‌شود که طبق ① $S_1 < \frac{5}{6}$ ولی تجدید آرایش S_1 یعنی S_2، طبق ② $S_2 > \frac{5}{6}$. طبق این مثال می‌توان گفت که ممکن است در یک سری همگرا، با تجدید آرایش جملات، حاصل سری تغییر کند.

* قضیهٔ ۱۲: هر تجدید آرایش یک سری همگرای مطلق، همگراست و مجموعش همان مجموع سری اصلی است.